UBND TỈNH HẢI DƯƠNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HẢI DƯƠNG

KỶ YẾU

HỘI THẢO TRƯỜNG ĐẠI HỌC HẢI DƯƠNG VỀ GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU TOÁN HỌC

Ngày 15 tháng 06 năm 2024

UBND TỈNH HẢI DƯƠNG

TRƯỜNG ĐẠI HỌC HẢI DƯƠNG

KỶ YẾU

HỘI THẢO TRƯỜNG ĐẠI HỌC HẢI DƯƠNG VỀ GIẢNG DẠY VÀ NGHIÊN CỨU TOÁN HỌC

Hải Dương, tháng 6 năm 2024

BAN TỔ CHỨC HỘI THẢO

TT	Họ và tên	Chức vụ, đơn vị	Chức danh
1	TS. Tạ Thị Thúy Ngân	Hiệu trưởng	Trưởng ban
2	TS. Tăng Thế Toan	Phó Hiệu trưởng	Phó Trưởng ban
3	TS. Nguyễn Thái Hưng	Trưởng phòng KHCN - TT - TV	Ủy viên
4	TS. Phạm Ngọc Hoa	Trưởng khoa Toán và KHTN	Ủy viên
5	ThS. Vũ Thùy Trang	Phó Trưởng phòng KHCN - TT - TV	Ủy viên, Thư ký

BAN CHƯƠNG TRÌNH

TT	Họ và tên	Chức vụ, đơn vị	Chức danh
1	TS. Phạm Ngọc Hoa	Trưởng khoa Toán và KHTN	Trưởng ban
2	TS. Nguyễn Thái Hưng	Trưởng phòng KHCN - TT - TV	Phó Trưởng ban
3	ThS. Nguyễn Ngọc Viên	Phó Trưởng khoa Toán và KHTN	Ủy viên, Thư ký
4	TS. Phạm Thị Hòa	Phó Trưởng khoa Toán và KHTN	Ủy viên
5	ThS. Vũ Thùy Trang	Phó Trưởng phòng KHCN - TT - TV	Ủy viên
6	ThS. Phạm Thị Loan	Phó trưởng khoa CNTT	Ủy viên

BAN THƯ KÝ

TT	Họ và tên	Chức vụ, Đơn vị	Chức danh
1	TS. Nguyễn Phương Ngọc	Trưởng phòng Đào tạo Sau đại học, Thư ký Hội đồng KH&ĐT	Trưởng ban
2	ThS. Vũ Thùy Trang	Phó Trưởng phòng KHCN - TT - TV	Phó Trưởng ban
3	TS. Phạm Thị Hòa	Phó Trưởng khoa Toán và KHTN	Ủy viên

BAN TÀI CHÍNH, CƠ SỞ VẬT CHẤT VÀ HẬU CẦN

TT	Họ và tên	Chức vụ, Đơn vị	Chức danh
1	TS. Nguyễn Thái Hưng	Trưởng phòng KHCN - TT - TV	Trưởng ban
2	ThS. Nguyễn Thị Thìn	Trưởng phòng Tài chính - KT	Phó Trưởng ban
3	ThS. Phùng Việt Phương	Trưởng phòng HC - QT	Phó trưởng ban
4	ThS. Tiêu Công Vũ	Giám đốc Trung tâm Tin học - Ngoại ngữ	Ủy viên
5	TS. Vũ Thị Kim Nhung	Phó Trưởng phòng Hành chính - Quản trị	Uỷ viên, Thư ký
6	ThS. Bùi Văn Lợi	Phó Trưởng phòng HC - QT	Uỷ viên
7	TS. Nguyễn Đình Hưng	Phó Trưởng phòng KHCN - TT - TV	Uỷ viên
8	ThS. Đặng Ngọc Anh	Phòng KHCN - TT - TV	Ủy viên
9	ThS. Cao Thu Phương	Bí thư Đoàn TNCS Hồ Chí Minh	Ủy viên

MỤC LỤC

ĐỀ DẪN HỘI THẢO

TS. Phạm Ngọc Hoa [1]

[1] Trưởng khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Dương

Giảng dạy và nghiên cứu khoa học (NCKH) là hai nhiệm vụ cốt lõi trong bất kỳ trường đại học nào ở Việt Nam cũng như ở trường Đại học Hải Dương. Khoa Toán & Khoa học Tự nhiên (Toán-KHTN) xác định rằng việc nghiên cứu khoa học là nhiệm vụ song hành và đóng vai trò quan trọng trong việc nâng cao chất lượng giáo dục và phát triển khoa học, công nghệ. Nghiên cứu khoa học giúp giảng viên và sinh viên mở rộng kiến thức, tìm kiếm các giải pháp mới cho các vấn đề thực tiễn và đóng góp vào sự tiến bộ của từng cá nhân. Hội thảo hay Hội nghị khoa học là nơi mà các nghiên cứu khoa học đó có cơ hội được chia sẻ. Vì thế việc tổ chức các hoạt động ngoại khóa, các buổi tọa đàm cho sinh viên, tổ chức hội thảo khoa học cấp khoa hay cấp trường hoặc tham gia các Hội nghị khoa học là những nhiệm vụ đã được khoa Toán-KHTN lên kế hoạch trong năm học 2023-2024.

Hội thảo về "Giảng dạy và nghiên cứu Toán học năm 2024" được tổ chức vào ngày 15 tháng 6 năm 2024 là hoạt động Khoa Toán-KHTN thực hiện kế hoạch chung của Trường Đại học Hải Dương, cũng là thực hiện một trong các nhiệm vụ NCKH của khoa. Đây là một hoạt động sẽ được duy trì thường niên, thường xuyên. Quá trình chọn tên cho Hội thảo đã trải qua nhiều cuộc thảo luận và chỉnh sửa, cuối cùng đã quyết định theo hai nhiệm vụ quan trọng nhất và có thể thực hiện hàng năm, bao gồm: 1) Triển khai và hiện thực hóa những nhiệm vụ giảng dạy mới, cũng như những vấn đề nghiên cứu lý thuyết hoặc thực tiễn mới; 2) Tiếp tục làm việc trên những vấn đề đã được thực hiện nhưng vẫn cần cải thiện hoặc chưa đạt; 3) Kết hợp cả hai việc trên.

Hội thảo trong giảng dạy và nghiên cứu toán học tại khoa Toán-KHTN năm 2024 thực sự mang lại nhiều lợi ích quan trọng cho cả giảng viên và sinh viên. Hội thảo là cơ hội để giảng viên chia sẻ kiến thức, kinh nghiệm giảng dạy và nghiên cứu của mình với cộng đồng, đồng thời có thể tìm kiếm cơ hội hợp tác nghiên cứu với các đồng nghiệp khác, từ đó tạo ra những dự án nghiên cứu mới và mở rộng mạng lưới quan hệ trong cộng đồng nghiên cứu toán học. Tham gia hội thảo còn giúp giảng viên nâng cao kỹ năng giảng dạy và truyền đạt kiến thức một cách hiệu quả hơn thông qua việc thảo luận và giao lưu với các đồng nghiệp. Thông qua các thảo luận và báo cáo, sinh viên có cơ hội tiếp xúc với những kiến thức và ý tưởng mới nhất trong lĩnh vực toán học. Sinh viên còn có cơ hội gặp gỡ các giảng viên và nhà nghiên cứu ở các cơ sở khác, từ đó tạo ra cơ hội học tập trong tương lai.

Tổ chức hội thảo này, Ban tổ chức mong muốn tạo ra một diễn đàn để các cán bộ quản lý, các giảng viên cùng cập nhật các xu hướng nghiên cứu Toán học mới nhất trên thế giới cũng như ở Việt Nam, đồng thời tổng kết, đánh giá, chia sẻ những vấn đề, những kết quả đã nghiên cứu, trong thực tế công việc trước hết là của chính mình, sau nữa là của bộ môn, của khoa trong năm học 2023-2024. Thông qua hội thảo này, hi vọng rằng chúng ta sẽ thảo luận và tìm kiếm giải pháp cho các vấn đề thực tiễn trong giảng dạy và nghiên cứu toán học tại khoa Toán- KHTN; đưa ra các đề xuất cải tiến chương trình giảng dạy và phương pháp dạy học để đáp ứng nhu cầu của sinh viên và xã hội; thúc đẩy sự phát triển chất lượng đào tạo tại khoa Toán, nâng cao trình độ chuyên môn của giảng viên. Việc tham gia và tổ chức hội thảo còn góp phần xây dựng một môi trường học thuật năng động, sáng tạo và chuyên nghiệp, giảng viên và sinh viên có cơ hội phát triển các kỹ năng mềm như thuyết trình, giao tiếp, làm việc nhóm, và quản lý thời gian. Hội thảo còn có mong muốn định hướng nghề nghiệp cho sinh viên, giúp sinh viên nhận thức rõ hơn về các hướng nghiên cứu và cơ hội nghề nghiệp trong lĩnh vực Toán học; tạo điều kiện cho sinh viên gặp gỡ và giao lưu với các chuyên gia, nhà khoa học và nhà tuyển dụng tiềm năng.

Trong quá trình chuẩn bị hội thảo, Ban tổ chức đã nhận được hơn 20 báo cáo tham luận của các nhà khoa học tại các trường Đại học trong nước, các cán bộ quản lí của trường Đại học Hải Dương và các giảng viên đang trực tiếp tham gia giảng dạy tại khoa. Các báo cáo này có thể chia thành 3 nhóm chủ đề chính.

- Nhóm thứ nhất gồm 3 báo cáo, bàn về xu hướng nghiên cứu và giảng dạy Toán học trong nước và quốc tế, định hướng phát triển mối quan hệ hợp tác nghiên cứu và giảng dạy của các tác giả GS.TSKH Hà Huy Khoái, ThS.NCS Phạm Thị Loan và ThS. Hoàng Thế Anh.

- Nhóm thứ hai gồm 6 báo cáo bàn về phương pháp giảng dạy Toán học, giải pháp nâng cao chất lượng dạy học các học phần môn Toán của PGS.TS Nguyễn Phương Chi - ThS Vũ Thị Hoạch, TS. Nguyễn Thị Thu Hà, TS. Phạm Ngọc Hoa, TS. Phạm Thị Trang, TS. Vũ Quốc Tuấn và ThS Vũ Thị Thảo.

- Nhóm thứ ba gồm các báo cáo còn lại, trình bày một số kết quả nghiên cứu trong lĩnh vực Giải tích Toán học như bài báo của Khoái- An- Hoa, NCS Lâm Thị Thoa, NCS Nguyễn Ngọc Viên cùng các cộng sự là giảng viên của các trường Đại học trong nước.

Các tham luận đã cho thấy sự phong phú, đa dạng với các góc độ tiếp cận khác nhau trong việc nghiên cứu và giảng dạy Toán học. Với tinh thần khoa học nghiêm túc, Ban tổ chức Hội thảo trân trọng ghi nhận đóng góp của nhà khoa học tại các trường Đại học trong nước, các cán bộ quản lí của trường Đại học Hải Dương và các giảng viên đang trực tiếp tham gia giảng dạy tại khoa trong quá trình tiến tới tổ chức Hội thảo này.

Với sự tham gia đa dạng và đầy sáng tạo của các diễn giả chính, chúng tôi hy vọng rằng Hội thảo sẽ mang lại nhiều kiến thức mới mẻ và kích thích sự phát triển toán học tại trường Đại học Hải Dương, đồng thời tạo cảm hứng sáng tạo và mở ra nhiều hướng đi mới cho mỗi cá nhân trong chúng ta trong công việc, từ đó định hướng cho con đường nghiên cứu và giảng dạy của chúng ta sau khi rời khỏi Hội thảo này.

Xin trân trọng cảm ơn sự tham gia của các diễn giả và các nhà khoa học, các giảng viên đã gửi báo cáo góp mặt trong kỷ yếu hội thảo, chắc chắn rằng sau đây sẽ là một hành trình dài để chúng ta tiếp tục có nhiều cơ hội, tham gia nhiều diễn đàn quy mô lớn hơn mà sự đóng góp của quý vị hôm nay là một bước khởi đầu có ý nghĩa vô cùng quan trọng./

BÁO CÁO MỜI

MỘT SỐ VẤN ĐỀ NGHIÊN CỨU VÀ GIẢNG DẠY TOÁN HỌC TRONG THỜI ĐẠI CÁCH MẠNG SỐ

GS.TSKH. Hà Huy Khoái [1]

[1] Viện Toán và NCKH ứng dụng, Đại học Thăng Long

Emai: hhkhoai@math.ac.vn

Báo cáo này đề cập đến những vấn đề sau:

1) Độ tin cậy của các chứng minh toán học (sử dụng và không sử dụng máy tính)

Độ tin cậy của các chứng minh toán học là một vấn đề quan trọng và được xem xét từ nhiều góc độ khác nhau, đặc biệt khi so sánh các chứng minh truyền thống với các chứng minh sử dụng mạng máy tính. Cả hai loại chứng minh đều có những ưu và nhược điểm riêng. Chứng minh truyền thống có độ tin cậy cao nhờ vào quá trình kiểm chứng nghiêm ngặt và sự đồng thuận của cộng đồng toán học, trong khi chứng minh bằng máy tính có thể xử lý các vấn đề phức tạp nhưng phụ thuộc vào độ tin cậy của công nghệ. Do đó, việc sử dụng kết hợp cả hai phương pháp có thể mang lại độ tin cậy cao nhất cho các chứng minh toán học, tận dụng ưu điểm của từng loại chứng minh để đảm bảo tính chính xác và minh bạch.

2) Lý thuyết chứng minh hình thức

Lý thuyết chứng minh hình thức là một nhánh của logic toán học và khoa học máy tính lý thuyết, nghiên cứu các hệ thống hình thức và các chứng minh trong các hệ thống đó. Mục tiêu của lý thuyết này là phân tích cấu trúc của các chứng minh toán học, phát triển các công cụ để tạo và kiểm tra chứng minh, và hiểu rõ hơn về tính chặt chẽ và nhất quán của các hệ thống logic.

3) Triển vọng sự trợ giúp của máy tính trong nghiên cứu toán học

Triển vọng của sự trợ giúp của máy tính trong nghiên cứu toán học là rất lớn và đang ngày càng mở rộng nhờ vào những tiến bộ trong công nghệ máy tính và các thuật toán thông minh. Sự trợ giúp của máy tính trong nghiên cứu toán học không chỉ là một triển vọng mà đã trở thành một thực tế quan trọng, định hình lại cách mà các nhà toán học thực hiện và xác minh các nghiên cứu của mình. Với sự phát triển không ngừng của công nghệ, vai trò của máy tính trong nghiên cứu toán học sẽ tiếp tục mở rộng, mang lại những đột phá mới và mở ra những chân trời mới trong lĩnh vực này.

4) Giảng dạy toán học trong thời kỳ cách mạng số

Thời kỳ cách mạng số mang đến những cơ hội và thách thức mới cho việc giảng dạy toán học. Sự phát triển của công nghệ kỹ thuật số không chỉ thay đổi cách chúng ta tiếp cận giáo dục mà còn tạo ra những công cụ và phương pháp giảng dạy mới, giúp nâng cao hiệu quả học tập và giảng dạy. Thời kỳ cách mạng số mang đến những thay đổi sâu rộng trong giảng dạy toán học. Sự kết hợp giữa công nghệ và phương pháp giảng dạy tiên tiến giúp nâng cao hiệu quả học tập, cá nhân hóa quá trình học tập và phát triển kỹ năng số cho cả giáo viên và học sinh. Việc áp dụng các chiến lược này không chỉ giúp học sinh hiểu sâu hơn và yêu thích môn toán mà còn chuẩn bị cho họ những kỹ năng cần thiết để thành công trong thế kỷ 21.

CÁC BÁO CÁO TOÀN VĂN

MỘT SỐ GIẢI PHÁP PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC SỐ CỦA GIẢNG VIÊN GIẢNG DẠY MÔN TOÁN CHO SINH VIÊN SƯ PHẠM TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC HẢI DƯƠNG

ThS. Hoàng Thế Anh [1]

[1] Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Dương

Tóm tắt

Phát triển năng lực số (NLS) cho đội ngũ giảng viên (GV) trong giảng dạy môn Toán cho Sinh viên Sư phạm Toán ở các trường đại học của nước ta nói chung, ở Đại học Hải Dương nói riêng là xu hướng phát triển tất yếu của việc xây dựng một nền giáo dục hiện đại, là yêu cầu bắt buộc trong thời đại bùng nổ của cuộc CMCN 4.0 nhằm nâng cao chất lượng giảng dạy của GV, học tập của Sinh viên. Bài báo góp phần xác định yêu cầu của việc phát triển NLS và một số giải pháp nhằm phát triển NLS của GV giảng dạy môn Toán cho Sinh viên (SV) sư phạm Toán.

Từ khóa: *Năng lực số, giảng viên, Sinh viên sư phạm Toán*.

Giới thiệu/Đặt vấn đề

Sự phát triển của khoa học công nghệ trong cuộc CMCN 4.0 đã làm thay đổi hoàn toàn phương thức giáo dục truyền thống. Tuy nhiên, thách thức đặt ra đối với GV, sinh viên là phải nắm được các vấn đề thay đổi đối với giảng dạy, học tập và cơ hội việc làm trong bối cảnh chuyển đổi số, từ đó chủ động thay đổi các thói quen và lựa chọn cách tiếp cận phù hợp để giảng dạy, học tập và làm việc trong thời đại số. Do đó, để phát triển NLS cho giáo viên nói chung, giáo viên Toán nói riêng, có khả năng thích ứng và làm chủ công nghệ là hết sức quan trọng.

1. Tổng quan nghiên cứu

Nâng cao NLS cho GV đóng vai trò quan trọng, để giải quyết những thách thức trong bối cảnh phát triển và ứng dụng CNTT trong giáo dục ngày nay, bao gồm cả các yêu cầu chuyển đổi số quốc gia. NLS được hiểu là những khả năng phù hợp của cá nhân để sống, học tập và làm việc trong một xã hội số. Theo đó, NLS không chỉ bao gồm những kỹ năng tìm kiếm thông tin trực tuyến, mà còn gồm các dịch vụ đòi hỏi chuyên môn cao như giải quyết vấn đề, chia sẻ và cộng tác với các đồng nghiệp trong môi trường số.

Hiện nay, việc nghiên cứu NLS của GV thuộc các ngành khoa học cụ thể vẫn còn gặp những giới hạn do chưa có sự thống nhất về khái niệm. Trong khi một bên coi NLS là mang tính kỹ thuật, có quan điểm khác cho rằng, trong lĩnh vực giáo dục, NLS là sự kết hợp giữa các hoạt động thực hành về các lĩnh vực khoa học, xã hội và văn hóa với các hình thức kiến thức, sáng tạo và đổi mới cao hơn, nghĩa là các kỹ năng đó cần được xây dựng trong bối cảnh thực hành cụ thể.

Trên thực tế, các nghiên cứu đã thiết lập, sử dụng, đánh giá và điều chỉnh các khung NLS cho phù hợp với bối cảnh nghiên cứu. Chẳng hạn, một nghiên cứu cho thấy, phát triển NLS có mối liên hệ phụ thuộc với tuổi tác vì tuổi càng trẻ thì trình độ kiến thức công nghệ càng cao hơn. Kết quả nghiên cứu cho thấy, việc tổ chức các khóa huấn luyện CNTT-TT cần được xem xét trong mối tương quan với nội dung, trình độ của các hoạt động đào tạo được thiết kế, đảm bảo sự phù hợp tương ứng với tuổi của người tham gia khóa học. Thông qua đó, GV phát triển các NLS để có đủ kiến thức, kỹ năng và nhận thức, phục vụ hoạt động nghiên cứu và giảng dạy một cách sáng tạo và linh hoạt.

Nghiên cứu tổng quan cũng cho thấy thực trạng NLS tại các trường đại học là tụt hậu so với các lĩnh vực khác, có thể là do sự lãnh đạo thiếu hiệu quả và những thay đổi trong văn hóa, mức độ đổi mới và hỗ trợ tài chính hạn chế.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Yêu cầu của việc phát triển năng lực số cho Sinh viên sư phạm

Thủ tướng Chính phủ ngày 25/1/2022 ban hành đã có Quyết định số 131/QĐ-TTg về phê duyệt Đề án "Tăng cường ứng dụng công nghệ thông tin và chuyển đổi số trong giáo dục và đào tạo giai đoạn 2022-2025 định hướng đến năm 2030". Tiếp sau đó Bộ GD&ĐT ngày 10/5/2022 ban hành Quyết định 1282/QĐ-BGDĐT về kế hoạch tăng cường ứng dụng công nghệ thông tin và chuyển đổi số trong giáo dục và đào tạo giai đoạn 2022 – 2025. Trong đó yêu cầu bổ sung quy định về NLS vào tiêu chuẩn GV, cán bộ quản lý giáo dục.

Theo Killen (2018), NLS được xem là yếu tố sống còn để đạt đến thành công trong học tập, nghiên cứu và phát triển sự nghiệp trong tương lai: đa phần, khả năng sử dụng công nghệ số là đòi hỏi của hầu hết mọi ngành nghề và mọi vị trí việc làm. Các ngành công nghiệp số trở thành nhân tố then chốt của nền kinh tế, các cơ sở giáo dục trở thành những mô hình doanh nghiệp số, GV và SV phải là những người tận dụng được các lợi ích của công nghệ, đồng thời hỗ trợ cộng đồng và thúc đẩy khả năng đổi mới, sáng tạo của các thế hệ kế tiếp.

Bên cạnh đó, với những ứng dụng các công nghệ mới hiện nay trong lĩnh vực giáo dục, người học có thể kết nối với các nguồn thông tin đa dạng về lĩnh vực, phong phú về định dạng, ngôn ngữ, tất cả đều vượt ra khỏi khuôn viên của nhà trường. Chính vì vậy, yêu cầu đặt ra đối với đội ngũ GV giảng dạy phải liên tục cập nhật, tìm hiểu và triển khai áp dụng những công nghệ mới đang thay đổi hàng ngày hàng giờ để đáp ứng được nhu cầu của người học. Trên nền tảng công nghệ, người dạy thực hiện vai trò hướng dẫn, truyền tải, kết nối người học với nguồn dữ liệu, học liệu; GV là người dạy số, phải làm chủ được công nghệ để sẵn sàng hỗ trợ người học cách tiếp cận, chấp nhận sử dụng, truyền cảm hứng cho người học để có thể sử dụng công nghệ, khai thác được tối đa nguồn tài nguyên vô giá này. Ngày nay, việc sử dụng các Apps hỗ trợ học tập với tư cách là "nhà giáo ảo", sử dụng các công nghệ trí tuệ nhân tạo (AI), dữ liệu lớn (Big Data), kết nối Internet vạn vật (IoT), máy học (Learning machine), học sâu (Deep learning), Robot dạy học ngày càng trở nên phổ biến. Với sự hỗ trợ của những "chuyên gia ảo" này, dường như người học cũng ngày càng trở nên hứng thú hơn với việc học tập và nghiên cứu, sẵn sàng thử trải nghiệm và đăng ký sử dụng các Apps hỗ trợ thông minh này.

Vì vậy, để nâng cao chất lượng giáo dục nghề nghiệp đòi hỏi SV Sư phạm những GV trong tương lai không chỉ cần kiến thức, kỹ năng, mà còn phải được phát triển NLS đáp ứng được với việc giảng dạy trong kỷ nguyên số. GV những người đào tạo ra một thế hệ công dân mới với kỹ năng số cơ bản cũng phải có khả năng truy cập, quản lý, hiểu, kết hợp, giao tiếp, đánh giá và sáng tạo thông tin một cách an toàn, phù hợp để phục vụ cho công việc giảng dạy, phát triển nghề nghiệp. SV sư phạm cần được phát triển NLS để đáp ứng được những yêu cầu của học tập, của cuộc sống hiện tại và chuẩn bị hành trang cho tương lai. Đây được xem là điều kiện quan trọng góp phần nâng cao chất lượng dạy và học trong cơ sở giáo dục trong bối cảnh mới.

2.2. Năng lực số của giảng viên giảng dạy môn Toán

Dựa trên khung NLS của UNESCO, từ yêu cầu nhiệm vụ và công việc của người GV giảng dạy môn toán cho SV nói chung, SV Sư phạm Toán nói riêng thể hiện trên một số nội dung sau:

Năng lực vận hành thiết bị và khai thác phần mềm số: Đây là năng lực đầu tiên và nó cũng là kỹ năng cơ bản nhất trong NLS, giúp mọi người sử dụng thành thạo các thiết bị và phần mềm liên quan đến công nghệ thông tin. Nhất là, với các môn toán có rất nhiều các phần mềm đòi hỏi GV cần phải biết và vận hành thành thạo trong quá trình giảng dạy .

Năng lực khai thác thông tin và dữ liệu số: Đây là năng lực rất quan trọng và cần thiết không chỉ với GV Toán mà trong đời sống hiện thực của con người hiện nay. Đặc biệt, trong thời đại bùng nổ công nghệ số thì tất cả mọi người muốn tồn tại và phát triển đều nhất thiết cần phải có khả năng tìm kiếm, khai thác, phân tích, xử lý, ứng dụng thông tin, dữ liệu chính xác, hiệu quả và tin cậy từ các nguồn trực tuyến để phục vụ cho mục đích của đời sống kinh tế - xã hội của cá nhân hay tổ chức.

Năng lực sáng tạo nội dung số: Đây là năng lực đặc biệt quan trọng trong thời đại số hiện nay. Nó chính là khả năng tạo ra các sản phẩm số như: hình ảnh, video, clip, âm thanh và văn bản để truyền đạt ý tưởng, thông điệp và nhân rộng giá trị một cách phổ biến, hiệu quả.

Năng lực giao tiếp và hợp tác trong môi trường số: Giao tiếp và hợp tác là bản năng sinh tồn vốn có của con người và nó cũng là kỹ năng sống vô cùng quan trọng. Kỹ năng này không chỉ giúp mọi người giao tiếp tốt hơn qua các công cụ truyền thông số, mà còn giúp họ hợp tác, làm việc nhóm hiệu quả hơn và mở mang tri thức, hoàn thiện các phẩm chất nhân cách cần thiết trong môi trường số.

Năng lực học tập, tiếp thu và phát triển kỹ năng số: Để không ngừng cập nhật kiến thức mới và nâng cao kỹ năng số, chúng ta cần học cách tự đào tạo, tự đánh giá, tự rút ra những bài học kinh nghiệm và áp dụng hiệu quả những kiến thức mới vào thực tiễn đời sống xã hội.

Năng lực bảo đảm an toàn thông tin mạng và an sinh số: Để bảo vệ thông tin và tài sản số của cá nhân, tổ chức, trước hết GV cần hiểu biết sâu sắc các nguyên tắc an toàn mạng và an sinh số, đồng thời phải biết sử dụng các cách thức để phòng chống, ngăn chặn các rủi ro, các mối đe dọa từ thông tin mạng, môi trường số.

Khi được trang bị đầy đủ các NLS trên, chúng ta mới có thể thích ứng với những thay đổi trong cuộc sống hiện đại và công việc một cách thành công và hiệu quả hơn. Đặc biệt, chúng ta cũng sẽ có nhiều cơ hội và dễ dàng tạo ra nhiều giá trị hơn trong đời sống, công việc và nhiệm vụ của mình.

2.3. Đánh giá chung việc phát triển năng lực số của giảng viên trong giảng dạy môn Toán cho Sinh viên Sư phạm Toán ở Trường Đại học Hải Dương hiện nay

2.3.1. Tổ chức khảo sát thực trạng

Phương pháp nghiên cứu định lượng được sử dụng trong nghiên cứu này để khảo sát thực trạng NLS của GV. Bảng hỏi trực tuyến (với công cụ Google Form) được thiết kế và sử dụng để thu thập dữ liệu sơ cấp liên quan đến NLS của GV Trường Đại học Hải Dương. Nhằm xác định các đặc điểm của NLS áp dụng cho GV, là cơ sở để xác định mức độ đáp ứng các yêu cầu về NLS.

Các nội dung khảo sát trong 6 lĩnh vực chính với 15 NLS cụ thể được kế thừa và điều chỉnh cho phù hợp với điều kiện thực tiễn ứng dụng CNTT&TT của Trường Đại học Hải Dương. Theo đó, mỗi nhóm năng lực cụ thể được khảo sát bao gồm 5 nội dung thông qua việc sử dụng thang đo Likert 5 mức độ. Trong đó, thang đo mức độ thành thạo được sử dụng để đánh giá nhóm: (1) trình độ CNTT-TT, (2) năng lực thông tin, dữ liệu và truyền thông, (3) năng lực sáng tạo, giải quyết vấn đề và đổi mới; thang đo mức độ thường xuyên được dùng để đánh giá nhóm: (4) năng lực giao tiếp, cộng tác và tham gia trong môi trường số, (5) năng lực học tập và phát triển số, và (6) năng lực nhận dạng và đảm bảo an sinh trong môi trường số.

2.3.2. Trình độ công nghệ thông tin – truyền thông của giảng viên giảng dạy môn toán cho Sinh viên Sư phạm Toán ở Nhà trường

Cụ thể được đánh giá dựa trên hai nhóm kỹ năng: Mức độ thành thạo và hiệu quả sử dụng các ứng dụng CNTT – TT. Về cơ bản GV đều thành thạo trong việc "Sử dụng các công cụ số để thực hiện các hoạt động nghiên cứu, giảng dạy môn toán"; ít thành thạo nhất trong việc "Xem xét các lựa chọn nguồn mở thay thế cho phần mềm tiêu chuẩn có bản quyền". Mức độ thành thạo trong "Sử dụng các phần mềm để thực hiện các hoạt động nghiên cứu, giảng dạy, Giải quyết các vấn đề kỹ thuật gặp phải trong quá trình sử dụng các công cụ số, phần mềm/ứng dụng" và "So sánh tính năng giữa các công cụ số, phần mềm tương tự để đưa ra lựa chọn sử dụng cái phù hợp nhất với bản thân" khá tốt. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thông thạo công nghệ thông tin – truyền thông của GV là 3.43 (mức 4/5).

Tổng hợp chung các kỹ năng được đưa ra để đánh giá hiệu quả sử dụng các ứng dụng công nghệ thông tin – truyền thông của GV, điểm trung bình là 3.45 (mức 4/5). Trong các nội dung được đưa ra, GV thành thạo nhất trong việc "Quản lý email bằng cách tổ chức các hộp thư đến khác nhau"; ít thành thạo nhất trong việc "Tạo và sử dụng danh sách số các công việc cần làm". Hiệu quả trong "Quản lý mật khẩu đăng nhập trên các thiết bị và ứng dụng khác nhau" xếp thứ hai, trong khi các nội dung về "Thay đổi cài đặt của phần mềm/ứng dụng cho phù hợp với cách làm việc của mình", và "Đồng bộ hóa danh bạ hoặc dữ liệu lịch trên các thiết bị và ứng dụng" đạt mức độ thành thạo như nhau.

2.3.3. Năng lực tiếp nhận thông tin, xử lý dữ liệu và truyền thông của giảng viên giảng dạy môn toán cho Sinh viên Sư phạm Toán ở Nhà trường.

Về năng lực tiếp nhận thông tin, GV thành thạo nhất trong việc "Chọn lọc, tham khảo các nguồn thông tin trực tuyến đáng tin cậy, chính xác và có giá trị"; ít thành thạo nhất trong việc "Sử dụng các ứng dụng quản lý tài liệu tham khảo". Các nội dung khác: "Sử dụng các bộ lọc (filters) trong tìm kiếm trực tuyến", "Mở rộng hoặc thu hẹp kết quả tìm kiếm theo các phạm vi khác nhau", và "Lưu trữ, tổ chức và quản lý các địa chỉ trang Web hữu ích". Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá năng lực thông tin của GV là 3.50 (mức 4/5).

Về năng lực xử lý dữ liệu, GV thành thạo nhất trong việc đánh giá được các số liệu thống kê được sử dụng trong cuộc tranh luận công khai; ít thành thạo nhất trong việc "Xác định các mẫu và xu hướng từ phân tích dữ liệu". Các nội dung khác, như: Tìm được những sự khác biệt có ý nghĩa thống kê, mô tả, mã hóa hoặc tập hợp dữ liệu thành các loại hoặc nhóm khác nhau, và tạo biểu đồ hoặc đồ họa thông tin từ dữ liệu. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thông thạo xử lý dữ liệu của GV là 3.45 (mức 4/5).

Về năng lực truyền thông của GV có trung bình là 3.40 (mức 4/5). Trong đó, GV thành thạo nhất trong tạo "Bài kiểm tra trực tuyến (Online quizzes)", tạo "Video, âm thanh (audio”, “Biểu đồ, đồ họa thông tin (Infographic)”, và “Trang web/ blog cá nhân/ fanpage”; ít thành thạo nhất trong tạo “Hoạt hình/ hình ảnh động”.

2.3.4. Năng lực sáng tạo, giải quyết vấn đề và đổi mới của giảng viên giảng dạy môn toán cho Sinh viên Sư phạm Toán ở Nhà trường.

Về năng lực sáng tạo, GV thành thạo nhất trong việc “Sử dụng bản đồ tư duy hoặc công cụ tư duy trực quan khác”, “Sử dụng các hiệu ứng nâng cao trong các ứng dụng chỉnh sửa hình ảnh”, “Tạo video hướng dẫn hoặc video ghi màn hình (screencast)”, và “Phác thảo bằng bút cảm ứng và máy tính bảng”; ít thành thạo nhất trong việc “Sử dụng máy in 3D hoặc công cụ số khác để xây dựng mô hình”. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thông thạo sử dụng các thiết bị số, phần mềm ứng dụng cơ bản của GV là 3.00 (mức 3/5).

Về năng lực giải quyết vấn đề, GV thành thạo nhất trong việc “Thực hiện khảo sát trực tuyến bằng bảng hỏi”, “Sử dụng một công cụ số/phương pháp số để giải quyết một vấn đề trong thực tiễn nghiên cứu và giảng dạy”, “Đặt câu hỏi trực tuyến trên các phương tiện truyền thông xã hội để thu thập, đối chiếu các ý tưởng”, và “Sử dụng phần mềm phân tích dữ liệu chuyên dụng”; ít thành thạo nhất trong việc “Xử lý vấn đề phát sinh cho một dự án nghiên cứu số”. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thông thạo trong giải quyết các vấn đề gặp phải trong hoạt động nghiên cứu, giảng dạy số của GV là 3.10 (mức 3/5).

Về năng lực đổi mới, GV thành thạo nhất trong việc “Sử dụng các thiết bị số, phần mềm/ứng dụng, mạng xã hội,… để học tập, cập nhật kiến thức, nâng cao trình độ”, “Tìm kiếm ý tưởng từ các lĩnh vực khác cho công việc của mình”, “Phát hiện các xu hướng mới trong ứng dụng công nghệ thông tin – truyền thông”, và “Hướng dẫn người khác sử dụng các thiết bị số, phần mềm/ứng dụng hoặc khắc phục các vấn đề kỹ thuật liên quan đến công nghệ thông tin – truyền thông”; ít thành thạo nhất trong việc “Làm quen và sử dụng các thiết bị hoặc ứng dụng mà người khác chưa dùng”. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thông thạo trong đổi mới sáng tạo trong quá trình ứng dụng công nghệ thông tin – truyền thông vào hoạt động nghiên cứu và giảng dạy của GV là 3.20 (mức 3/5).

2.3.5. Năng lực giao tiếp, cộng tác và tham gia trong môi trường số của giảng viên giảng dạy môn toán cho Sinh viên Sư phạm Toán ở Nhà trường.

Năng lực giao tiếp, GV thường sử dụng nhất “Các ứng dụng nhắn tin trực tiếp/chia sẻ hình ảnh (như Whatsapp, Instagram, Facebook, Twitter, Zalo,…)”, Việc sử dụng “Các nền tảng đào tạo trực tuyến (như Collaborate, Zoom, BigBlueButton)”, “Các mạng xã hội để chia sẻ thông tin”, “Các diễn đàn thảo luận” và ít sử dụng nhất “Hội nghị truyền hình”. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thường xuyên trong ứng dụng công nghệ thông tin - truyền thông trong giao tiếp số phục vụ nghiên cứu và giảng dạy của GV là 3.50 (mức 4/5).

Về năng lực cộng tác, GV thường “Tổ chức phòng họp trực tuyến thông qua các ứng dụng như Zoom, Google Meet…” nhiều nhất, “Nhắn tin trực tiếp để cộng tác trong thời gian thực”, “Sử dụng phần mềm/ ứng dụng giúp quản lý dự án” và “Tạo lịch làm việc và các tài liệu cộng tác trực tuyến”; ít nhất là “Chia sẻ danh sách công việc hoặc tiến trình thực hiện công việc của dự án”. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thường xuyên trong hợp tác số phục vụ nghiên cứu và giảng dạy của GV là 3.30 (mức 3/5).

Về năng lực tham gia, GV thường “Tham gia các sự kiện truyền trực tiếp (live events) theo thời gian thực (tweetups, realtime chat, Microsoft Teams…)” nhất và ít dùng nhất là

“Đóng góp cho các trang web, blog hoặc wiki mở”. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thường xuyên tham gia của GV là 2.80 (mức 3/5).

2.3.6. Năng lực học tập và phát triển số của giảng viên giảng dạy môn toán cho Sinh viên Sư phạm Toán ở Nhà trường.

Về năng lực học tập, GV thường “Tham gia một khóa học trực tuyến” nhất; “Tải xuống podcast hoặc bài giảng mở”, “Sử dụng các ứng dụng học ngoại ngữ hoặc rèn luyện trí não”, và “Học một ứng dụng/phần mềm hoàn toàn mới”; ít tham gia nhất trong việc “Đảm nhận một việc/vai trò để phát triển các kỹ năng công nghệ số”. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thường xuyên tham gia của GV là 3.08 (mức 3/5).

Về năng lực phát triển số, “Giới thiệu các tài nguyên thông tin số hữu ích” thường được GV thực hiện nhiều nhất và ít nhất là “Thiết kế các câu đố/bài kiểm tra/đánh giá trực tuyến”. Các kỹ năng: Tạo các bài giảng hoặc thuyết trình số, Hướng dẫn người học tuân thủ bản quyền hoặc bảo mật thông tin trong môi trường số, và Tạo các video giải thích hoặc hướng dẫn cho người học có mức độ sử dụng thường xuyên. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thường xuyên ứng dụng công nghệ thông tin – truyền thông để hỗ trợ người học của GV là 3.29 (mức 3/5).

2.3.7. Năng lực nhận dạng và đảm bảo an sinh trong môi trường số của giảng viên giảng dạy môn toán cho Sinh viên Sư phạm Toán ở Nhà trường

Về năng lực nhận dạng, GV thường “Cân nhắc về quyền riêng tư của người khác khi chia sẻ thông tin” nhiều nhất và ít thực hiện nhất việc “Liên kết các phương tiện truyền thông khác nhau (như email, Twitter, ResearchGate) để phát triển số người theo dõi”. “Cài đặt quyền riêng tư trên tất cả các ứng dụng mạng xã hội đã tham gia”, “Quản lý, cập nhật các hồ sơ khác nhau cho mạng xã hội”, và “Kiểm soát ảnh hưởng của cá nhân trên mạng xã hội” có mức độ thực hành thường xuyên. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thường xuyên quản lý danh tính số của GV là 3.29 (mức 3/5).

Về đảm bảo an sinh trong môi trường số, GV thường “Sử dụng mạng xã hội để mở rộng và nuôi dưỡng các mối quan hệ trong hoạt động nghiên cứu, giảng dạy” nhiều nhất và ít thực hành nhất việc “Lập lịch định kỳ ngắt màn hình thiết bị điện tử trong khi làm việc”. Các nội dung khác, như: Đăng xuất khỏi mạng xã hội khi cần để giúp tập trung vào công việc, Thiết lập không gian làm việc để có tư thế làm việc phù hợp, và Sử dụng các ứng dụng liên quan đến sức khỏe hoặc thuộc diễn đàn liên quan đến sức khỏe có mức độ khá tốt. Điểm trung bình của tất cả các nội dung được đưa ra để đánh giá mức độ thường xuyên thực hành các thói quen số của GV là 3.19 (mức 3/5).

Bảng 2.1: Bảng tổng hợp trung bình chung các nội dung đánh giá NLS của GV môn toán cho Sinh viên Sư phạm Toán

TT	**Năng lực số**	**Điểm trung bình**	**Ghi chú**
A	**Trình độ công nghệ thông tin**	**3.39**	
1	Mức độ thông thạo công nghệ thông tin	3.43	
2	Năng suất/hiệu quả số	3.35	
B	**Năng lực thông tin, dữ liệu và truyền thông**	**3.45**	
1	Năng lực thông tin	3.50	
2	Năng lực quản lý dữ liệu	3.45	

3	Năng lực truyền thông	3.40	
C	**Năng lực sáng tạo, giải quyết vấn đề và đổi mới**	**3.10**	
1	Năng lực sáng tạo	3.00	
2	Năng lực giải quyết vấn đề	3.10	
3	Năng lực đổi mới	3.20	
D	**Năng lực giao tiếp, cộng tác và tham gia trong môi trường số**	**3.20**	
1	Năng lực giao tiếp	3.50	
2	Năng lực cộng tác	3.30	
3	Năng lực tham gia trong môi trường số	2.80	
E	**Năng lực học tập và phát triển số**	**3.12**	
1	Năng lực học tập	3.08	
2	Năng lực giảng dạy	3.16	
F	**Năng lực nhận dạng và đảm bảo an sinh trong môi trường số**	**3.24**	
1	Năng lực nhận dạng	3.29	
2	Năng lực đảm bảo an sinh trong môi trường số	3.19	

2.4. Một số giải pháp phát triển năng lực số của giảng viên dạy môn Toán cho Sinh viên sư phạm Toán

Một là nâng cao nhận thức cho GV về chuyển đổi số và tầm quan trọng của NLS trong bối cảnh chuyển đổi số.

Chuyển đổi số là bước chuyển mình mạnh mẽ, đòi hỏi sự thay đổi từ trong tư duy, nhận thức của mỗi người. Do vậy, cần thực hiện các biện pháp nhằm nâng cao nhận thức, phổ cập tầm quan trọng cho GV, SV. Từ đó mới phối hợp cùng nhau xây dựng văn hóa số trong giáo dục.

Nhận thức đầy đủ và sâu sắc là cơ sở nền tảng để nâng cao tinh thần trách nhiệm và tạo sự chuyển biến vững chắc trong hành động. Phải làm tốt công tác tuyên ruyền, giáo dục để GV hiểu rõ chuyển đổi số là xu hướng tất yếu, là chìa khóa vàng, là sự sống còn của đào tạo đại học trong bối cảnh hiện nay. Giáo dục – đào tạo và nghiên cứu khoa học trên môi trường công nghệ số không phải là nhất thời, mà là xu hướng khách quan của sự tồn tại và phát triển của nhân loại và Việt Nam không thể đứng ngoài xu hướng ấy. Có như vậy mới khơi gợi, thúc đẩy nhu cầu, củng cố động cơ, gia tăng sự nỗ lực từ chính đội ngũ GV trong phát triển NLS của bản thân. GV trước hết cần không ngừng tìm tòi, tự bồi dưỡng và phát triển NLS thông qua nền tảng dữ liệu mở phong phú vốn có hiện nay. Mặt khác, GV phải tăng cường giao tiếp và hợp tác trên nền tảng số và từng bước xây dựng văn hóa giao tiếp trên không gian số, xác lập mối quan hệ hợp tác trên phương diện học thuật mang tính hiệu quả và văn minh. Bên cạnh đó, cần tích cực và sáng tạo bằng nhiều hình thức khác nhau khi tham gia xây dựng hệ thống cơ sở dữ liệu gồm cả nội dung và hình thức xây dựng kho học liệu có chất lượng cho cộng đồng và nâng cao tính trách nhiệm cộng đồng, tinh thần xã hội hóa khi chia sẻ, cũng như khai thác thông tin trong môi trường số hiện nay.

Hai là bảo đảm tốt các điều kiện tốt, tổ chức nhiều hoạt động tăng cường NLS của GV dạy môn Toán cho Sinh viên sư phạm Toán

Nhà trường cần quan tâm, tổ chức nhiều hoạt động tăng cường NLS cho GV, chú trọng triển khai hệ thống cơ sở dữ liệu đồng bộ và thống nhất với cơ sở dữ liệu quốc gia, cơ sở dữ liệu ngành, đẩy mạnh số hóa việc quản lý trên mọi phương diện, trong đó có quản lý dạy và học. Đầu tư cơ sở hạ tầng mạng và thiết bị thông tin đồng bộ, hiệu quả phục vụ cho công tác dạy và học môn toán cho SV Sư phạm Toán. Đồng thời, hoàn thiện các quy định trong quản lý quá trình dạy và học cho SV Sư phạm Toán và coi đây là hoạt động trung tâm, then chốt để nâng cao chất lượng giảng dạy môn toán cho SV nói chung, SV Sư phạm Toán nói riêng và tạo điều kiện tốt nhất, bảo đảm quyền lợi cao nhất nhằm thúc đẩy, tạo động lực cho đội ngũ GV, SV nâng cao NLS của bản thân. Bên cạnh đó, cần xây dựng khung đánh giá năng lực người dạy và người học, nhất là đội ngũ SV phù hợp với phương thức đào tạo số thay thế khung đánh giá năng lực SV hiện nay.

Nhà trường cần đẩy nhanh quá trình phát triển kho học liệu số phục vụ học tập cho SV nói chung, SV Sư phạm Toán nói riêng, bảo đảm đáp ứng tốt nhất nhu cầu cho người dạy và người học. Tập trung phát triển toàn diện, đồng bộ kho học liệu số nhưng có trọng tâm, trọng điểm, có lộ trình và bước đi thích hợp; đồng thời khắc phục triệt để những bất cập, hạn chế đang tạo ra những cản trở cho việc nâng cao chất lượng giáo dục - đào tạo của Nhà trường.

Ba là Tích hợp phát triển NLS vào quá trình giảng dạy một số học phần Toán, chuẩn hóa, nội dung giảng dạy sát với chuẩn đầu ra của Sinh viên Sư phạm Toán

Tích hợp được hiểu là sự lồng ghép các nội dung phát triển NLS cho SV vào những nội dung vốn có của một học phần dựa trên việc phân tích mục tiêu, nội dung của học phần đó. Để có thể tích hợp các nội dung phát triển NLS vào một số học phần Toán nhằm hỗ trợ SV Sư phạm Toán phát triển NLS, GV cần thực hiện các bước sau đây: Phân tích mục tiêu, nội dung học phần và các bài giảng; Lựa chọn nội dung phát triển NLS có thể tích hợp vào bài giảng; Xác định hình thức, phương pháp dạy học; Đánh giá sự phát triển NLS của SV.

Tích cực thực hiện chủ trương tăng cường ứng dụng các thành tựu công nghệ thông tin hiện đại trong dạy học của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Qua các kết quả nghiên cứu của thế giới cho thấy thế giới đánh giá cao tầm quan trọng và những tác động tích cực của công nghệ thông tin đến dạy học và đã đưa ra nhiều minh chứng sinh động cho việc ứng dụng công nghệ thông tin vào dạy học Toán cũng như những kĩ năng của người GV khi ứng dụng công nghệ thông tin vào dạy học cần có.

Việc hình thành, rèn luyện các kĩ năng dạy học, trong đó có kĩ năng ứng dụng công nghệ thông tin vào dạy học là một trong những mục tiêu và được xác định rõ trong chuẩn đầu ra của chương trình đào tạo giáo viên Toán.

Tự khám phá các cách thức và khai thác hiệu quả các phần mềm, ứng dụng web, ứng dụng trên các thiết bị di động trong dạy học .

Trước hết, phải khẳng định rằng nếu GV giảng Toán mà khai thác tốt Internet, các phần mềm ứng dụng trong quá trình lên lớp thì ngoài việc truyền thụ kiến thức, đổi mới nội dung, phương pháp dạy học thì đây là một môi trường thuận lợi cho SV làm quen, học hỏi qua từng giờ giảng của GV để tích lũy dần thành kĩ năng kĩ xảo cho bản thân mình

Trong quá trình giảng dạy cho SV Sư phạm Toán, GV nên sử dụng các phần mềm toán học như GeoGebra, MATLAB, Maple hoặc Mathematica… để dạy học. Vì nó giúp rất nhiều trong việc giải toán, giúp Sinh viên hình dung các khái niệm phức tạp. Khai thác khía cạnh minh hoạ và thực nghiệm của phần mềm toán học động trong dạy học một tri thức toán.

Với một số trường hợp trong dạy học Toán, ta có thể dùng phần mềm để tính toán nhanh các kết quả và dành thời gian cho việc phân tích kết quả, mở rộng bài toán hay phát hiện sai lầm trong lời giải. Hiện nay, các phần mềm Toán học bên cạnh việc cho phép tính toán như một máy tính bỏ túi thì cũng cung cấp cho người sử dụng một hệ thống các câu lệnh để xử lí tính toán trong toán học… Để khai thác được các chức năng này, đòi hỏi ta phải có kĩ năng sử dụng các câu lệnh, các công cụ của phần mềm.

Tích hợp các nguồn tài nguyên trực tuyến để SV tự học và mở rộng kiến thức

Kết luận và khuyến nghị

Tóm lại, chuyển đổi số trong giáo dục – đào tạo ở Trường Đại học Hải Dương nói chung, mà tiêu điểm là phát triển NLS cho GV trong giảng dạy môn toán cho SV Sư phạm Toán nói riêng trong bối cảnh sự tác động mạnh mẽ của cuộc CMCN 4.0 là xu hướng tất yếu khách quan. Xây dựng được đội ngũ GV Nhà trường có NLS là điều kiện tiên quyết để thực hiện mục tiêu chuyển đổi số và góp phần nâng cao hơn nữa chất lượng đào tạo đại học nói chung và giảng dạy môn toán cho SV Sư phạm Toán nói riêng. Việc phát triển NLS cho đội ngũ GV giảng dạy môn toán cho SV Sư phạm Toán phải được xác định là yêu cầu, nhiệm vụ vừa mang tính cấp bách, vừa mang tính lâu dài và có ý nghĩa quyết định đến chất lượng giáo dục – đào tạo của Nhà trường. Quá trình thực hiện phải được tiến hành thường xuyên, liên tục và thực hiện đồng bộ các giải pháp nêu mới bảo đảm đạt chất lượng, hiệu quả cao, góp phần nâng cao chất lượng đào tạo nguồn nhân lực chất lượng cao của Nhà trường, đáp ứng yêu cầu đổi mới giáo dục hiện nay.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Killen, C. (2018). *Collaboration and Coaching: Powerful Strategies for Developing Digital Capabilities*. In Digital Literacy Unpacked (pp. 29-44). Facet.

[2] Bộ Giáo dục và Đào tạo, (2018), *Thông tư số 20/2018/ TT-BGDĐT quy định Chuẩn nghề nghiệp giáo viên cơ sở giáo dục phổ thông*, Hà Nội.

[3] Bộ Giáo dục và Đào tạo, (2022), *Quyết định số 1282/QĐ-BGDĐT ngày 10 tháng 05 năm 2022 về kế hoạch tăng cường ứng dụng công nghệ thông tin và chuyển đổi số trong giáo dục và đào tạo giai đoạn 2022 – 2025*.

[4] Chính phủ, (25/1/2022), *Quyết định số 131/QĐ-TTg của Thủ tướng Chính phủ phê duyệt Đề án "Tăng cường ứng dụng công nghệ thông tin và chuyển đổi số trong giáo dục và đào tạo giai đoạn 2022 - 2025*, định hướng đến năm 2030".

[5] UNESCO. (2018). *A Global Framework of Reference on Digital Literacy*. In UNESCO Institute for Statistics.

TỔ CHỨC CÁC HOẠT ĐỘNG NGÔN NGỮ GIÚP HỌC SINH HỌC TẬP HIỆU QUẢ TỪ VỰNG TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN Ở TIỂU HỌC

PGS.TS. Nguyễn Phương Chi [1], ThS. Vũ Thị Hoạch [2]

[1] Trường Đại học Sư phạm Hà Nội
[2] Trường Đại học Hải Dương

Tóm tắt

Sử dụng ngôn ngữ toán học (NNTH) là một trong các kĩ năng cần thiết trong quá trình dạy và học toán. Cải thiện các kĩ năng NNTH là một khía cạnh thiết yếu của việc dạy học toán, đặc biệt là ở tiểu học. Quá trình này phải được thực hiện liên tục trong suốt quá trình học tập của người học. Từ vựng toán học là một phần quan trọng của NNTH, nắm vững từ vựng toán học giúp học sinh (HS) tăng cường khả năng sử dụng NNTH một cách chính xác, hiệu quả, qua đó giúp HS hình thành các giác quan logic toán học của mình. Bài viết này trình bày một số cách thức tổ chức dạy học thông qua đó giáo viên hỗ trợ HS hiểu và biết cách sử dụng các từ vựng một cách hiệu quả trong học tập và trong thực tiễn.

***Từ khóa**: Từ vựng toán học, ngôn ngữ toán học, dạy học môn toán ở tiểu học.*

Đặt vấn đề

Nền tảng của ngôn ngữ toán học (NNTH) là từ vựng toán học. Năng lực từ vựng là một yếu tố góp phần quan trọng trong việc học và nắm vững các khái niệm toán học. Tăng cường phát triển vốn từ vựng là một yếu tố quan trọng trong dạy học môn Toán, điều này càng cần thiết đối với những HS vốn kém về ngôn ngữ. Những trẻ em khả năng ngôn ngữ thấp thì khả năng khả năng giải quyết vấn đề không cao, một kĩ năng quan trọng trong toán học. Trong trường học, học sinh thiếu nền tảng kiến thức từ vựng sẽ gặp khó khăn trong việc hiểu nghĩa khi đọc, viết, diễn đạt bằng lời khái niệm toán học và đưa ra cách giải quyết vấn đề cần thiết trong học tập môn Toán. Hiểu và sử dụng thành thạo từ vựng góp phần quan trọng trong việc học và học tập hiệu quả môn Toán của HS. Tổ chức các hoạt động ngôn ngữ giúp HS học tập hiệu quả là rất cần thiết trong dạy học môn Toán nói chung và môn Toán ở tiểu học nói riêng.

1. Vài nét về từ vựng toán học

Từ vựng toán học là tập hợp các từ ngữ, thuật ngữ, kí hiệu, biểu tượng (sở đồ hình vẽ, biểu đồ....), hình ảnh toán học được dùng để mô tả, biểu diễn, diễn đạt nội dung toán học.

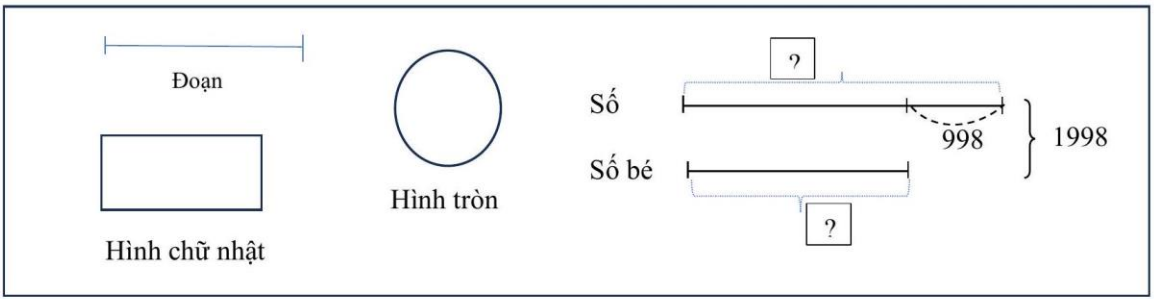
Thuật ngữ toán học là các từ, cụm từ biểu thị khái niệm, các đối tượng toán học và các quan hệ thuộc lĩnh vực toán học: Số chẵn, số lẻ, đường thẳng, góc vuông, mẫu số, tử số, ...

Kí hiệu toán học gồm các chữ số, các dấu kí hiệu (,+: , ...). Chữ số là ký tự toán học phổ biến nhất, đại diện các số, bản thân chúng có tính trừu tượng cao. Ngoài ra, có thể sử dụng một chữ số xác định để diễn tả nhiều nghĩa khác nhau. Ví dụ, xem xét chữ số 2 trong các số sau đây:

$$52 \quad 23 \quad 4^2 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad m^2$$

Chữ số 2 mang ý nghĩa khác nhau (chữ số, lũy thừa, mẫu số, tử số, đơn vị diện tích) và có tính trừu tượng cao trong từng nội dung toán học mà nó thể hiện. Ngoài khả năng tạo sự phức tạp, nghĩa giống nhau có thể được trình bày bằng các ký tự khác nhau.

Biểu tượng toán học gồm sơ đồ, hình vẽ, biểu đồ, đồ thị ...để biểu diễn, biểu đạt, thể hiện các quan hệ toán học và các đối tượng toán học cụ thể. Sơ đồ toán học là hình vẽ mô tả những đặc trưng nhất định của đối tượng, quan hệ và nội dung toán học. Trong nội dung toán học ở tiểu học có sơ đồ đoạn thẳng, lược đồ, mô hình, hình vẽ, biểu đồ....



Hình ảnh toán học là ngôn ngữ biểu thị qua hình ảnh chứa đựng nội dung, quan hệ và các đối tượng toán học mà không sử dụng lời nói, kí tự văn bản. Chẳng hạn, dưới đây là hình ảnh toán học xuất hiện trong SGK môn Toán lớp 1, bộ Cánh Diều.

Hệ thống từ vựng của một ngôn ngữ là thành phần cơ bản của ngôn ngữ đó. Sử dụng thành thạo một ngôn ngữ nào đó không thể thiếu hệ thống từ vựng cùng với nghĩa của chúng. Từ vựng toán học là cần thiết trong việc truyền đạt ý tưởng, khái niệm toán học và việc sử dụng thành thạo hệ thống từ vựng là rất quan trọng đối với việc học toán của trẻ.

2. Các hoạt động ngôn ngữ toán học trong dạy học môn Toán ở tiểu học

Nguyễn Bá Kim (2007) đã khẳng định rằng: “mỗi một nội dung dạy học liên hệ với những hoạt động nhất định”; Hoạt động ngôn ngữ là một trong các hoạt động xuất hiện trong dạy học nội dung môn Toán ở trường Phổ thông. Hoạt động ngôn ngữ được thể hiện khi yêu cầu HS phát biểu, giải thích một định nghĩa, mệnh đề nào đó, đặc biệt là bằng lời lẽ của mình hoặc biến đối chúng từ dạng này sang dạng khác. Theo đó, tác giả đã chỉ ra trong hoạt động dạy học khái niệm cần "chú ý hướng dẫn và khuyến khích HS diễn đạt các định nghĩa một cách khác nhau, bằng lời lẽ của bản thân mình."

Khi nghiên cứu về biểu diễn toán học Vũ Thị Bình (2016) đã đưa ra 3 hình thức hoạt động NNTH: Hoạt động tiếp nhận NNTH trên phương diện tiếp nhận từ vựng, cú pháp và ngữ nghĩa; Hoạt động chuyển ý thành từ; Hoạt động chuyển đổi ngôn ngữ từ các dạng khác nhau của NNTH, "phiên dịch" từ ngôn ngữ tự nhiên (NNTN) sang NNTH và ngược lại.

Tác giả Lê Văn Hồng khi xem xét NNTH theo nghĩa mở rộng, cùng với quan điểm coi diễn ngôn Toán học (văn bản nói hay viết) là thể loại đa tín hiệu, tác giả nêu ra 4 loại hoạt động NNTH: 1) Chuyển nội dung, ý tưởng toán học thành "vỏ vật chất", có dùng loại tín hiệu của NNTH; 2) Nêu ra nội dung toán học từ NNTH nào đó; 3) chuyển đổi các hình thức ngôn ngữ giữ nguyên nội dung, ý tưởng toán học; 4) biến đổi một loại tín hiệu của NNTH, nhất là tín hiệu về các kí hiệu toán học, mà vẫn giữ nguyên phần nào đó trong nội dung ý tưởng toán học.

Xem xét các quá trình tổ chức các tình huống dạy học Toán điển hình cho HS tiểu học, bao gồm các tình huống điển hình như dạy học hình thành khái niệm, biểu tượng, công thức, quy tắc, tính chất, thuật toán, dạy học giải bài toán, ôn tập, củng cố và hệ thống hóa kiến thức, kĩ năng... chúng tôi đề xuất một số hoạt động NNTH như sau:

2.1. Hoạt động tiếp nhận NNTH trên phương diện từ vựng, cú pháp và ngữ nghĩa toán học một cách chính xác, lô gic, hệ thống.

Từ vựng toán học ở bậc Tiểu học là NNTH đầu tiên được trang bị cho học sinh theo nghĩa chính xác của toán học, ngoài ra, từ vựng được chuyên biệt hóa cao, bao gồm các kí hiệu, thuật ngữ (từ và cùm từ), biểu tượng (hình vẽ, sơ đồ, biểu đồ, ...), ngôn ngữ hình ảnh. Cú pháp của NNTH là các quy tắc kết hợp các kí hiệu, biểu tượng, thuật ngữ toán học thành công thức, biểu thức, mệnh đề toán học. Ngữ nghĩa của NNTH được hiểu là nghĩa hoặc nội dung của kí hiệu, thuật ngữ, biểu tượng toán học. Chẳng hạn như, thuật ngữ " ba phần tư" trong trong ví dụ sau:

Ví dụ l. Bài dạy về phân số cho HS lớp 4:

- Cú pháp: $\frac{3}{4}$.

- Ngữ nghĩa:

□	Là 3 phần bằng nhau trong 4 phần bằng nhau của một đơn vị	Là thương của phép chia có số bị chia là 3, số chia là 4.

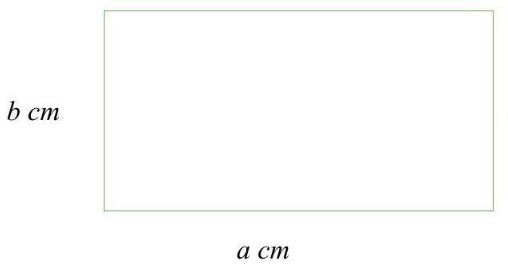
Sự quan tâm đến quá trình hình thành và rèn luyện cho học sinh hiểu và sử dụng các từ, thuật ngữ, kí hiệu toán học trong các định nghĩa, quy tắc, tính chất, công thức và biết diễn đạt các mệnh đề toán học một cách chính xác, logic sẽ góp phần cho hoạt động NNTH đạt hiệu quả cao hơn. Khi HS tiếp nhận NNTH theo hoạt động này giúp HS học tập được về ý tưởng nội dung toán học mà NNTH sẽ biểu thị chúng trên phương diện từ vựng, ngữ nghĩa, cú pháp một cách chính xác, logic và có hệ thống.

2.2. Hoạt động diễn đạt, mô tả nội dung toán học tù NNTH nào đó

Mỗi một đơn vị kiến thức được trình bày trong SGK ban đầu là những hình ảnh, sơ đồ, hình vẽ rồi mới đến kí hiệu toán học, thuật ngữ toán học, do vậy hoạt động mô tả, diễn đạt nội dung toán học mà hình ảnh, sơ đồ, hình vẽ biểu thị là rất cần thiết và quan trọng đối với quá trình diễn ra học toán của HS. Khi phát biểu các quy tắc, tính chất toán học, làm thế nào giúp học sinh hiểu để vận dụng cho tốt thì trước hết HS mô tả, diễn đạt các quy tắc, tính chất đó bằng kí hiệu hoặc bằng các cú pháp cụ thể tại các giá trị cụ thể.

Chẳng hạn, khi HS học về quy tắc tính diện tích hình chữ nhật, ta có thể thực hiện hoạt động sư phạm như sau để học sinh mô tả nội dung toán học từ NNTH nào đó.

Ví dụ 2. Điền chữ thích hợp vào chỗ chấm:



S = …………………………..

→ *(S là diện tích hình chữ nhật)*

Hoặc

$S = a \times b \;\longrightarrow\;$ ………

(S là diện tích hình chữ nhật)

Để diễn đạt, giải thích, mô tả lại các khái niệm, biểu tượng toán học đòi hỏi HS huy động được các kiến thức và có khả năng sử dụng ngôn ngữ nói chung và NNTH nói riêng hợp lý, chính xác và lôgíc. Trong hoạt động này HS nhớ lại kí hiệu, thuật ngữ chỉ khái niệm cần diễn đạt, mô tả lại, sau đó xác định đặc tính của khái niệm rồi mới phát biểu, diễn đạt mô tả lại đầy đủ và chính xác. Hơn nữa, HS liên kết được giữa các khái niệm với nhau, xét xem mối quan hệ tương đồng giữa chúng và phát biểu định nghĩa khái niệm, mô tả đối tượng này qua đối tượng tương đồng (có thể tương đồng một phần) với chúng.

2.3. Hoạt động chuyển đổi ngôn ngữ từ các dạng khác nhau của NNTH, chuyển đổi từ NNTH sang NNTN và ngược lại

Trong mỗi khái niệm, quy tắc, tính chất toán học, NNTH luôn được sử dụng phối hợp các thuật ngữ, các kí hiệu và các biểu tượng. Mỗi một phát biểu (nói) có nhiều cách biểu đạt tương ứng trong cách viết và ngược lại, một biểu thị viết tương ứng với nhiều cách phát biểu (đọc) khác nhau, chuyển đổi một phát biểu viết sang một phát biểu nói và ngược lại. Trong hoạt động này NNTH là phương tiện chủ yếu kết hợp với NNTN tạo nên sự giao lưu tri thức trong hoạt động học tập toán. Hoạt động diễn đạt, phát biểu các quy tắc, tích chất toán học bằng nhiều cách khác nhau không những HS ghi nhớ, hiểu được bản chất của khái niệm, quy tắc, tính chất toán học mà còn giúp HS rèn luyện việc sử dụng NNTH thành thạo, chính xác, lôgic.

Chẳng hạn,

Ví dụ 3. Quy tắc tính diện tích hình thang có thể phát biểu bằng các cách sau:

Cách 1: Diện tích hình thang bằng tổng độ dài hai đáy nhân với chiều cao (cùng đơn vị đo) rồi chia cho 2 .

Cách 2: Nếu S là diện tích của hình thanh; a và b là độ dài các cạnh đáy của hình thang; h là chiều cao tương ứng thì $S = \frac{a+b}{2} \times h$.

Cách 3. Nếu

thì

Diện tích hình thang $ABCD$ là $\frac{(AB+CD)}{2} \times AH$

Ví dụ 4. Ta có thể định nghĩa khái niệm Hình chữ nhật như sau:

Hình chữ nhật là hình tứ giác có 4 góc vuông và có hai cạnh dài bằng nhau, hai cạnh ngắn bằng nhau.

Hình chữ nhật là hình bình hành có một góc vuông.

Khi tổ chức cho HS thực hiện hoạt động chuyển đổi hay "phiên dịch" giữa NNTH, giữa NNTH và NNTN cần đảm bảo tính "chính xác hóa" cần tuân thủ nghiêm ngặt trong

NNTH, đồng thời cho HS thấy được vai trò và mối quan hệ của biểu tượng toán học, kí hiệu toán học cũng như sự uyển chuyển các hình thức NN này.

Việc dạy cho HS biết cách "phiên dịch" từ NNTH sang NNTN và ngược lại giúp HS hình thành và rèn luyện các kiến thức, kĩ năng toán học đặc thù mà còn giúp cho HS có khả năng vận dụng toán học trong thực tiễn một cách hiệu quả, đồng thời thấy được ý nghĩa toán học trong đời sống.

2.4. Biến đổi trên một loại tín hiệu của NNTH, chủ yếu là tín hiệu về các kí hiệu TH, mà vẫn giữ nguyên phần nào trong đó nội dung ý tưởng toán học.

Theo kết quả nghiên cứu của Tôn Nữ Mỹ Nhật (2013), chiếm dụng lớn nhất trong một diễn ngôn toán học không phải là ngôn từ mà là tín hiệu kí hiệu. Thay thế ngôn từ, các kí hiệu chính là phương tiện để trình bày mối quan hệ nhanh, gọn, tiết kiệm nhất. Như vậy, chúng ta không thể làm toán nếu chỉ sử dụng ngôn ngữ hay nói cách khác, chúng ta không thể làm toán nếu không sử dụng hình vẽ, kí hiệu toán học. Vì vậy, thực hiện biến đối trên bình diện tín hiệu của NNTH là quá trình rèn luyện và hình thành cho HS cách sử dụng NNTH trong quá trình học toán.

Chẳng hạn, khi dạy học sinh về hệ thống đơn vị đo của một đại lượng nào đó, để thiết lập mới quan hệ giữa các đơn vị đo, có thể thực hiện dạng bài toán chuyển đổi đơn vị đo như sau:

Ví dụ 5: Điền vào chỗ trống:

$12345\ \text{cm} = \cdots \ldots .\ \text{dm} = \cdots \ldots ..\ \text{m} = \cdots \ldots .\ \text{km}$

$100\ \text{m} = \cdots \ldots \text{cm} = \cdots \ldots .\ \text{km} = \cdots .$

Lập bài toán và biến đổi bài toán là hoạt động nằm trong tình huống dạy học giải toán ở tiểu học. Lập và biến đổi bài toán giúp cho HS hoàn thành năng lực khái quát hóa và kỹ năng giải toán, rèn năng lực sáng tạo trong học tập. Trong hoạt động này HS sử dụng NN trong việc diễn đạt bài toán, lập bài toán mới, viết tiếp để được bài toán mới từ bài toán ban đầu bằng việc thay đổi dữ kiện (thường là một từ vựng với tính chất ban đầu, hoặc là từ vững đó với tính chất mới, hoặc là từ vựng mới với tính chất hoàn toán mới..).

Ví dụ 6: Từ chữ số 3 và 5 , viết 4 số có hai chữ số.

Từ ví dụ này ta có thể lập được các bài toán sau:

Bài 1: Từ chữ số 3 và 5 , viết các số có 2 chữ số.

Bài 2 : Từ chữ số 0 và 5 , viết các số có 2 chữ số.

Bài 3: Từ các chữ số 1,3 và 5 để viết các số có 2 chữ số.

Bài 4 : Từ các chữ số 1,3 và 5 , viết các số có 3 chữ số khác nhau. Mỗi số viết được có tổng các chữ số là bao nhiêu?

Bài 5 : Viết các số có ba chữ số mà tổng các chữ số là 8 .

Như vậy, hoạt động NNTH trong các tình huống dạy học trên ở Tiểu học coi NNTH vừa là công cụ, phương tiện, vừa là kết quả của hoạt động NNTH. Trong đó, NNTH thể hiện đầy đủ các chức năng của mình trong hoạt động học tập độc lập và giao lưu.

3. Một số biện pháp chủ yếu giúp HS học tập hiệu quả từ vựng toán học trong dạy học môn Toán ở tiểu học

Biện pháp 1. Tổ chức cho học sinh nhận diện, mô tả từ vựng toán học thông qua quá trình dạy học khái niệm toán học

Một khái niệm toán học được tạo thành từ sự liên kết giữa các từ, cụm từ, thuật ngữ và các liên từ trong toán học tạo thành. Do vậy, quá trình hình thành khái niệm toán học cũng là quá trình nhận diện, định nghĩa các từ vựng toán học. Trên cơ sở các hoạt động ngôn ngữ được thực hiện trong dạy học môn toán ở tiểu học, để giúp HS nhận diện, mô tả từ vựng toán học thông qua quá trình hình thành khái niệm toán học bằng cách yêu cầu HS thực hiện các hoạt động sau:

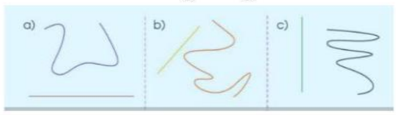
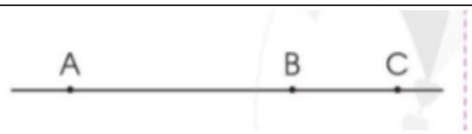
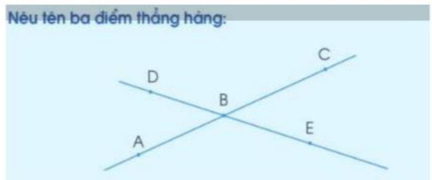
a) Yêu cầu HS đọc, viết đúng, mô tả các đặc điểm của thuật ngữ.

b) Yêu cầu HS phát biểu lại khái niệm của thuật ngữ bằng nhiều cách nếu có thể.

c)Yêu cầu HS điền những từ, thuật ngữ, cụm từ. đoạn câu thích hợp và chỗ trống để hoàn chỉnh một định nghĩa khái niệm.

d)Yêu cầu HS giải thích để xác nhận (hay bác bỏ) sự thuộc vào phạm vi của khái niệm của một đối tượng đã cho. Chẳng hạn, trong bài "Đường thẳng, đường cong, đường gấp khúc" (Toán 2, tập 1 tr86, Cánh Diều) chúng ta có thể tổ chức các hoạt động khi giới thiệu thuật ngữ "Đường thẳng", "Ba điểm thẳng hàng", ..

Ví dụ 7.

HĐ 1: Gọi tên, mô tả hình ảnh bên?	
HĐ 2: Giáo viên vẽ đường thẳng trên bảng, HS quan sát và GV yêu cầu HS gọi tên hình vừa vẽ	
HĐ 3: Giáo viên chính thức hóa thuật ngữ Đường thẳng. Yêu cầu học sinh gọi tên, đọc, viết thuật ngữ.	Đường thẳng
HĐ 4: Tổ chức cho HS nhận diện đường thẳng qua bài tập	Bài 1: Chỉ ra đường thẳng 
HĐ 5: GV đưa hình ảnh tiếp theo, yêu cầu HS cho biết nói về những điều em biết khi quan sát hình ảnh trên. (Có thể HS đã mô tả được: ba điểm A, B, C cùng thuộc một đường thẳng, điểm B nằm giữa hai điểm A và C, ….)	
HĐ 6: Giáo viên chính thức hóa thuật ngữ: Ba điểm thẳng hàng	Ba điểm A, B, C cùng nằm trên một đường thẳng. A, B, C là ba điểm thẳng hàng.
HĐ 7: Tổ chức cho HS nhận dạng về *đường thẳng, ba điểm thẳng hàng*...	Bài 2: 
HĐ 8: GV yêu cầu HS dùng mô tả về đối tượng vẽ lại một đối tượng mới.	

Hoạt động ngôn ngữ diễn ra trong Ví dụ 7: Gọi tên thuật ngữ gắn với biểu tưởng, mô tả định nghĩa của đối tượng mới, vẽ đường thẳng và biểu diễn được 3 điểm thẳng hàng và không thẳng hàng.

Ví dụ 8. Khi HS được học về Hình chữ nhật, chúng ta có thể tổ chức các hoạt động:

HĐ 1: Gọi tên hình	
HĐ 2: Yêu cầu HS hãy liệt kê tát cả những gì em biết về hình này.	
HĐ 3: Yêu cầu HS kể tên một số vật dụng trong đời sống có trong lớp học có hình dạng này	
HĐ 4: Yêu cầu HS hãy giải thích khi chọn những đồ vật trong HĐ 3	

Sau khi hình thành khái niệm về hình chữ nhật, để củng cố biểu tượng hình ta có thể xây dựng hoạt động sau:

HĐ 1: Trong các hình sau, hình nào là hình chữ nhật và hình nào không phải là hình chữ nhật? Tại sao? (Trong tập hợp nhiều hình hình học)

HĐ 2: Hình bên có bao nhiêu hình chữ nhật? Hãy kể tên các hình chữ nhật đó?(Trong một hình có nhiều hình dạng)

HĐ 3: Kẻ thêm một đường thẳng để có hình chữ nhật?

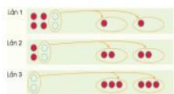
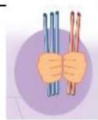
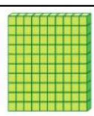
Trong ví dụ này, học sinh nhận dạng được biểu tượng của khái niệm, tên của khái niệm (Thuật ngữ), giải thích được yêu cầu của đề bài.

Với các yêu cầu đó tạo cơ hội cho HS thực hiện các hoạt động ngôn ngữ tương thích với quá trình hình thành khái niệm toán học mà ở đó HS tiếp nhận, nhận dang và sử dụng từ vựng toán học.

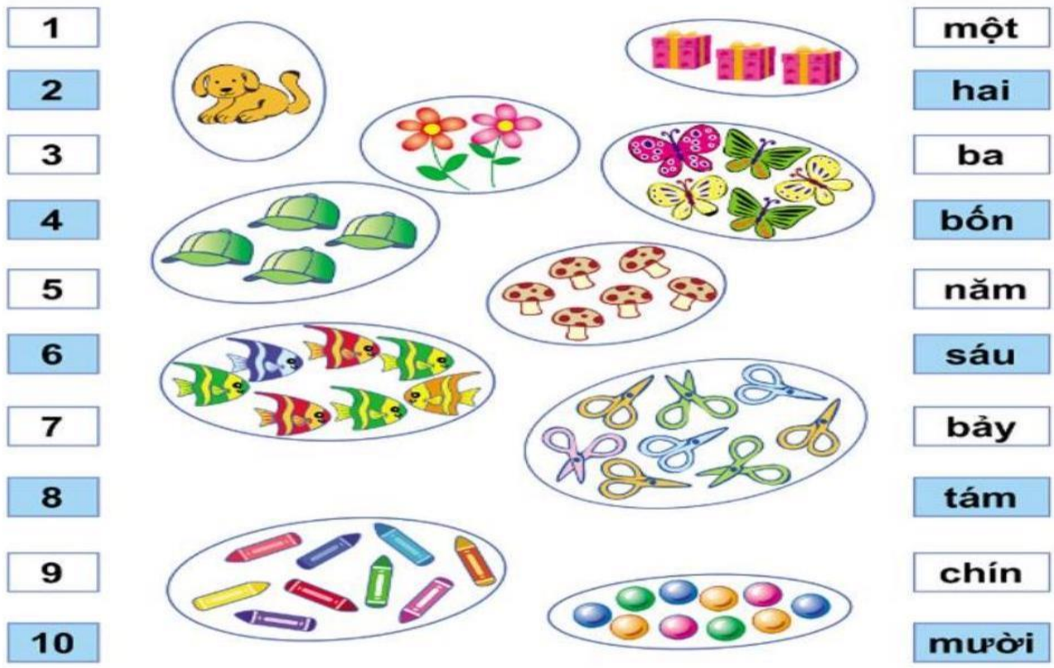
Biện pháp 2. Tổ chức cho học sinh nhận diện, biểu diễn các tù vựng bằng nhiều hình thức khác nhau

Để biểu thị một đối tượng toán học hay một quan hệ toán học, ta có thể sử dụng NNTH ở nhiều dạng: kí hiệu, hình ảnh, thuật ngữ, biểu tượng toán học hoặc kí hiệu bằng âm thanh.

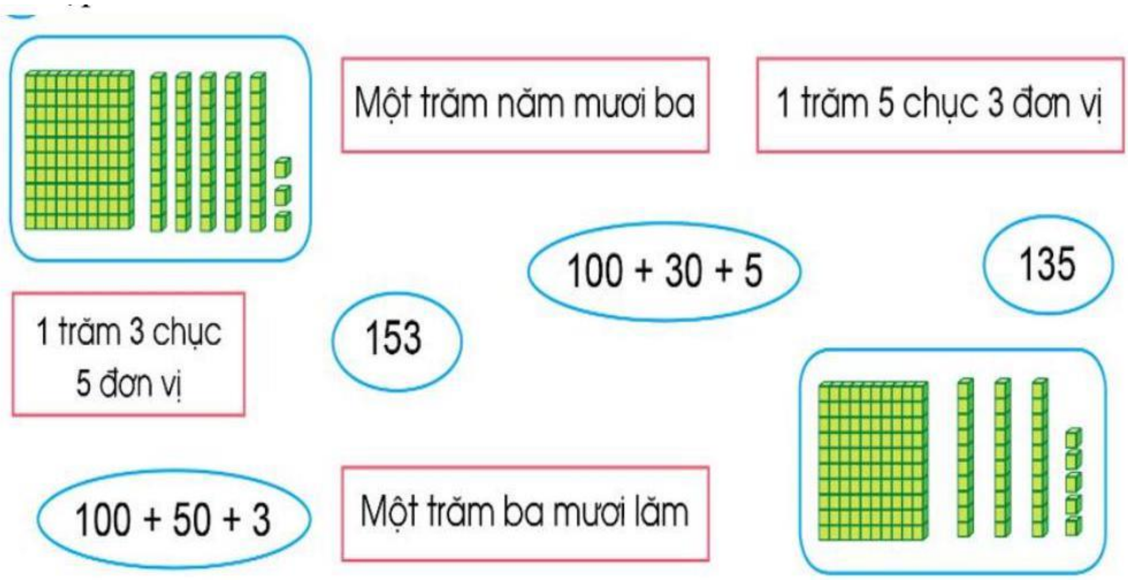
Ví dụ 10. Nối kí hiệu, thuật ngữ, hình ảnh toán học và biểu tượng thích hợp

Kí hiệu		Thuật ngữ		Hình ảnh toán học		Biểu tượng
$3 + 2 = 5$		Hai				
100		Một trăm				
2		3 cộng 2 bằng 5				
$6 : 2 = 3$		6 chia 2 bằng 3				
		Hình chữ nhật				

Ví dụ 11. Tìm các thẻ ghi cùng số lượng



Ví du 12. Ghép các thẻ thích hợp



Biện pháp 3. Tổ chức cho học sinh sử dụng các từ vựng thông qua hoạt động giải toán

Hoạt động giải toán là hoạt động cơ bản trong dạy học môn Toán ở tiểu học. Khi giải toán, HS sử dụng hệ thống từ vựng cùng với các quy tắc ngữ pháp để biểu đạt nội dung toán học một cách chính xác thông qua các hoạt động như đọc hiểu nội dung đề bài toán, xây dựng cách thức giải bài toán, trình bày giải bài toán. Thông qua giải toán, giúp HS rèn luyện sử dụng từ vựng và phát triển nghĩa của từ vựng. Bằng các yêu cầu sau đây có thể tạo ra các cơ hội giúp HS thực hành, luyện tập sử dụng, củng cố và cơ hội mở rộng từ vựng toán học trong dạy học môn Toán ở tiểu học.

a) Yêu cầu HS tóm tắt bài toán bằng nhiều cách khác nhau.

b) Yêu cầu HS điền từ ngữ, thuật ngữ, cụm từ,.. vào chỗ trống để được lời giải đúng

c) Yêu cầu HS phát hiện lời giải sai và sửa lại cho đúng.

d) Khuyến khích HS giải bài toán bằng nhiều cách khác nhau.

e) Yêu cầu HS phát hiện các bài toán có cùng cấu trúc toán học.

f) Khuyến khích HS đặt, phát biểu và lập đề toán mới.

Ví dụ 13. Bài toán: Bình có 10 nhãn vở. Bình có nhiều hơn An 3 nhãn vở. Hỏi An có bao nhiêu nhãn vở?

Lời giải của bạn Hòa	Lời giải của Nga
Lời giải	Lời giải
Số nhãn vở của bạn An là	An có tât cả sồ nhãn nhở là
$10 - 3 = 7$ (nhãn vở)	$10 + 3 = 13$ (nhãn vở)
Đáo số: 7 nhãn vở	Đáp số: 13 nhãn vở

Hãy chọn lời giải đúng? Tại sao em lại chọn lời giải đó?

Ví du 13: Theo em bạn nào tính đúng?

An: $20 - 8 : 4 \times 2 = 6$
Nam: $20 - 8 : 4 \times 2 = 16$
Hiên: $20 - 8 : 4 \times 2 = 19$

Ví dụ 14. Đọc bài toán và điền phép tính thích hợp vào chỗ trống.

Hai lớp 3 A và 3 B cùng tham gia trò chơi kéo co, lớp 3 A có 25 bạn, Iớp 3 B có 23 bạn. Số bạn tham gia được chia đều thành 4 đội. Hỏi mỗi đội có bao nhiêu bạn?

Bài giải

Số học sinh lớp 3A và 3B là:

? ? ? = ? (bạn)

Mỗi đội có số bạn là:

? ? ? = ? (bạn)

Đáp số: ? bạn.

Vi dụ 15 .

Chọn dấu (+, −, ×, :) hoặc dấu ngoặc ( ) vào vị trí thích hợp để biểu thức có giá trị đúng:

a) 8 ? 4 ? 2 = 1
8 ? 4 ? 2 = 4

b) 8 ? 4 ? 2 = 10
8 ? 4 ? 2 = 30

Kết luận

Trong bài viết này chúng tôi hướng tới xây dựng một số biện pháp hữu ích có thể thực hiện được trong quá trình dạy học môn Toán cho HS ở tiểu học nhằm giúp học sinh tiếp nhận hệ thống từ vựng một cách hiệu quả. Hiểu biết từ vựng cung cấp cho HS các cơ sở nền tảng toán học, giúp HS nâng cao năng lực học tập môn Toán nói chung và môn Toán tiểu học nói riêng. Do vậy từ vựng toán học phải được dạy một cách tích cực, chủ động trong suốt quá trình diễn ra hoạt động học. Chúng tôi hy vọng một số biện pháp đã trình bày ở trên, nếu giáo viên thực hiện tốt sẽ góp phần tăng khả năng ghi nhớ và sử dụng từ vựng toán học của HS ở tiểu học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trần Ngọc Bích (2011), *Tìm hiểu từ vựng toán học trong sách giáo khoa môn Toán các lớp đầu cấp tiểu học*, Tạp chí Giáo dục, số 273 .

[2] Nguyễn Bá Kim (2007), *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư Phạm Hà Nội.

[3] Tôn Nữ Mỹ Nhật (2013), *Diễn ngôn Toán như một thể loại đa tín hiệu, tập chí ngôn ngữ*, số 3/2013.

[4] Dr. David Chard, *Language and Vocabulary Consultant for Houghton Mifflin Math and Professor of Reading*, University of Oregon,

[5] Dr. Madeline Kovarik (2010), *Building Mathematics Vocabulary*, Published 12 October 2010 Linguistics

[6] International Journal for mathematics teaching and learning

[7] Lena Wessel (2020), *Vocabulary in learning processes towards conceptual understanding of equivalent fractions-specifying students' language demands on the basis of lexical trace analyse*, Mathematics Education Research Journal 2020 32:653-681

STABILITY OF NONLINEAR POSITIVE TIME-DELAY SYSTEMS IN BAM-COHEN-GROSSBERG NEURAL NETWORKS

ThS. Lê Thị Hồng Dung [1]

[1] Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội

Abstract: In this paper, the problems of positivity and exponential stability a BAM-CohenGrossberg neural networks model with time-varying delays and nonlinear self-excitation rates are studied. By novel comparison techniques via differential-integral inequalities, the exponential convergence of state trajectories to a unique positive equilibrium is established by tractable linear programming conditions, which can be effectively solved by various convex optimization algorithms. Numerical simulations are given to illustrate the effectiveness of the obtained theoretical results.

Keywords: *Positive systems, BAM-Cohen-Grossberg model, exponential stability, timevarying delays, M-matrix.*

1. Introduction

In various practical models, relevant states like liquid level in controlling tanks, concentration of chemicals, population size of species or the number of molecules are always nonnegative. Such models are described by dynamical systems called positive systems [1]. Practical applications of positive systems can be found in a variety of disciplines from biology, ecology and epidemiology, chemistry, pharmacokinetics to air traffic flow networks, control engineering, telecommunication and chemical-physical processes [2-5]. Apart from a wide range of applications, positive systems also possess many elegant properties that have yet no counterpart in general systems [6]. Moreover, many problems known to be NP-hard, in general, turn out to be deceptively simple in the context of linear positive systems. Thus, due to theoretical and practical features, the theory of positive linear systems has received ever-increasing interest in the past few years.

While the theory of positive systems has been intensively studied for various kinds of linear systems, this area is still considerably less well-developed for nonlinear systems, in particular, for models arising in artificial and biological neural networks. Typically, dynamics of a network is represented by a system of nonlinear differential equations with or without delay. In the past two decades, the study involving qualitative behavior of nonlinear systems describing various types of neural networks has attracted significant research attention due to a wide range of applications [7-16]. However, there has been very little attempt devoted to the study of positive nonlinear systems in neural networks. On one hand, when a neural network is designed for application purposes of positive systems, for example, in identification [17], control [18], monotone-regular behavior implement [19] and various disciplines in the academia and industries, states of the network should inherit the positivity constraint of practical models. On the other hand, for neural systems, the nonlinearity of neuron activation functions makes the study of positive neural networks with delays more complicated and challenging. Up to date, there have been only a few results concerning the stability problem of positive neural networks with delays [20]. In particular, in [21], the positivity of solutions and exponential stability of a unique positive equilibrium was studied for a class of nonlinear time-delay systems of the form

$$x_i'(t) = -d_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) \tag{1}$$

$$+\sum_{j=1}^{n} b_{ij} g_j(x_j(t-\tau(t))) + J_i,\ i \in [n] \tag{1}$$

System (1) represents the model of Hopfield neural networks with time-varying delays. Based on comparison techniques via differential-integral inequalities, explicit conditions were formulated using the theory of M-matrix and linear programming (LP) approach. The results of [21] were later extended to the following second-order differential nonlinear system which describes a modelcalled inertial Hopfield-type neural networks with multiple delays [22]

$$\frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = -a_i \frac{dx_i(t)}{dt} - b_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij} f_j(x_j(t))$$

By using the state transformation

$$\eta_i y_i(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} + \xi_i x_i(t) \tag{3}$$

where η_i and ξ_i are constants, $\eta_i \neq 0$, system (2) can be written in the vector form

$$\begin{cases} x'(t) = -D_\xi x(t) + D_\eta y(t) \\ y'(t) = -D_\alpha y(t) + D_\beta x(t) + D_\eta^{-1}[Cf(x(t)) + Df(x_\tau(t)) + I] \end{cases} \tag{4}$$

where the notation D_θ, for a $\theta \in \mathbb{R}^n$, denotes the diagonal matrix formulated by stacking components of θ. By utilizing the model (4), LP-based conditions were then derived for the positivity of solutions and exponential stability of the unique positive equilibrium of inertial neural systems with delays (2).

Bidirectional associative memory (BAM) model of neural networks, introduced by [23], was first used to study stability and encoding properties of two-layer nonlinear feedback neural networks. This model possesses many application prospects in the areas of pattern recognition, signal and image processing, which has attracted considerable research attention. Another model of neural networks, namely Cohen-Grossberg model [26], has also been extensively investigated in the past few decades [24,25]. As mentioned in the literature, Cohen-Grossberg neural networks include many ecological models and neural networks such as the Lotka-Volterra model in population dynamics and Hopfield neural networks. However, most existing works in the literature have been devoted to specific types of BAM neural networks described by the Hopfield model [25, 27-29]. There have been only a few results concerning stability analysis of BAM neural networks in the Cohen-Grossberg model. For example, in [30], the problem of asymptotic stability of neutral-type BAM-Cohen-Grossberg neural networks with mixed discrete and distributed time-varying delays was studied via Lyapunov-Krasovskii functional method and linear matrix inequalities (LMIs) approach. The problem of fixed-time stabilization was investigated for impulsive BAM-Cohen-Grossberg neural networks without delay in [31]. Based on some comparison techniques via differential inequalities, fixed-time stability and stabilization conditions were derived in terms of matrix inequalities involving settling time and frequency of impulses.

Despite of elegant properties and potential applications of positive BAM neural networks with delays, the study concerning stability analysis and control for this kind of models is quite scarce. In [32], the problem of exponential stability was first studied for positive nonlinear systems which describe a model of BAM-Hopfield neural networks with delays

$$\begin{cases} x_i'(t) = -\alpha_i\varphi_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}f_j\left(y_j(t-\sigma_j(t))\right) + I_i \\ y_j'(t) = -\beta_j\psi_j(y_j(t)) + \sum_{i=1}^{n} c_{ji}g_i(x_i(t)) + \sum_{i=1}^{n} d_{ji}g_i(x_i(t-\tau_i(t))) + J_j \end{cases} \tag{5}$$

Based on extended comparison techniques via differential inequalities combining with Brouwer's fixed point theorem and M-matrix theory, the existence and global exponential stability of a unique positive equilibrium of the system were derived through tractable linear programming (LP) conditions. To the authors' knowledge, the problems of positivity and global exponential stability of positive equilibrium of BAM Cohen-Grossberg (BAM-CG) neural networks with timevarying delays has not been addressed in the literature. In addition, it should be mentioned that the proposed methods and existing results developed for Hopfield-type BAM neural networks cannot be simply extended to BAM-CG neural networks with delays according to the nature of structure themselves. This motivates the present study.

In this paper, the problem of positivity and exponential stability is first studied for nonlinear systems modeling BAM neural networks in the Cohen-Grossberg model with time-varying delays and nonlinear self-excitation rates of the form

$$\begin{cases} x_i'(t) = \alpha_i(x_i(t))\left[-\delta_i\varphi_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}f_j(y_j(t)) + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}f_j\left(y_j(t-\sigma_j(t))\right) + I_i\right] \\ y_j'(t) = \beta_j(y_j(t))\left[-\rho_j\psi_j(y_j(t)) + \sum_{i=1}^{n} c_{ji}g_i(x_i(t)) + \sum_{i=1}^{n} d_{ji}g_i(x_i(t-\tau_i(t))) + J_j\right] \end{cases} \tag{6}$$

Based on novel comparison techniques via differential inequalities, unified conditions for the existence and exponential stability of a unique positive equilibrium of model (6) are derived in terms of tractable LP-based conditions.

The remaining of this paper is organized as follows. Section 2 introduces the model description and preliminaries. Main results on positivity and global exponential stability of a unique positive equilibrium of the model are presented in Section 3. A numerical example with simulations is given in Section 4 to validate the derived conditions. The paper ends with concluding remarks in Section 5 and cited references.

2. Preliminaries

Notation. $\mathbb{R}^n$ denotes the n-dimensional Euclidean space, $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i|$ for a vector $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^{m\times n}$ is the set of $m \times n$-matrices. $\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$ is the vector with all entries equal one. $\sigma(A)$ denotes the set of eigenvalues of $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ and $\rho(A) = \max\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(A)\}$ is its spectral radius. $v = \mathrm{vec}(v_1, \dots, v_k)$ denotes the augmented vector formulated by stacking components of $v_1, v_2, \dots, v_k$. For two vectors $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$ and $y = (y_i) \in \mathbb{R}^n$, we write $x \preceq y$ if $x_i \le y_i$ and $x \prec y$ if $x_i < y_i$ for all $i \in [n] \triangleq \{1,2,\dots,n\}$. $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n: x \succeq 0\}$ and $|x| = (|x_i|) \in \mathbb{R}^n_+$ for $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$. A matrix $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ is nonnegative, write $A\geq 0$, if $a_{ij}\geq 0$ for all i,j. $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ denotes the set of $\mathbb{R}^n$-valued continuous functions on $[a,b]$ endowed with the norm $\|\phi\|_c=\sup_{a\leq t\leq b}\|\phi(t)\|$ for a $\phi\in C([a,b],\mathbb{R}^n)$.

2.1. Model description

Consider the following model of BAM-Cohen-Grossberg neural networks with delays

$$\begin{cases} x_i'(t)=\alpha_i(x_i(t))\left[-\delta_i\varphi_i(x_i(t))+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}f_j(y_j(t))+\sum_{j=1}^{m}b_{ij}f_j\big(y_j(t-\sigma_j(t))\big)+I_i\right], i\in[n] \\ y_j'(t)=\beta_j(y_j(t))\left[-\rho_j\psi_j(y_j(t))+\sum_{i=1}^{n}c_{ji}g_i(x_i(t))+\sum_{i=1}^{n}d_{ji}g_i(x_i(t-\tau_i(t)))+J_j\right], j\in[m] \end{cases} \tag{7}$$

where n,m are the number of neurons in X-layer and Y-layer, respectively. $x_i(t)$ and $y_j(t)$ represent the state variables of the i th neuron field F_X and j th neuron field F_Y; $\alpha_i(x_i)$ and $\beta_j(y_j)$ are neural amplification functions, $\varphi_i(x_i),\psi_j(y_j)$ are nonlinear decay rate functions and $\delta_i>0,\rho_j>0$ are self-inhibition coefficients. For linear decay rate functions (i.e. $\varphi_i(x_i)=x_i$ and $\psi_j(y_j)=y_j$), δ_i and ρ_j are the rates at which i th and j th neurons will reset their potential to the resting state in isolation when disconnected from the network and external inputs. In system (7), f_j,g_i are neuron activation functions and $a_{ij},b_{ij},c_{ji},d_{ji}, i\in[n],j\in[m]$, are connection weights which represent the strengths of connectivity between cell j th in F_Y and cell i th in F_X. I_i and J_j are external inputs to the i th neuron and j th neuron, respectively. $\tau_i(t)$ and $\sigma_j(t)$ denote the communication delays between neurons which satisfy

$$0\leq\tau_i(t)\leq\bar{\tau},\ 0\leq\sigma_j(t)\leq\bar{\sigma} \tag{8}$$

where $\bar{\tau}$ and $\bar{\sigma}$ are known positive constants. Initial conditions associated with system (7) are specified as follows

$$x(t_0+\xi)=x^0(\xi),\xi\in[-\bar{\tau},0],\ y(t_0+\theta)=y^0(\theta),\theta\in[-\bar{\sigma},0] \tag{9}$$

where $x^0\in C([-\bar{\tau},0],\mathbb{R}^n)$ and $y^0\in C([-\bar{\sigma},0],\mathbb{R}^m)$ are initial functions.

We denote the matrices $\alpha(x)=\mathrm{diag}\{\alpha_1(x_1),\dots,\alpha_n(x_n)\},\beta(y)=\mathrm{diag}\{\beta_1(y_1),\dots,\beta_m(y_m)\}$, $D_\delta=\mathrm{diag}\{\delta_1,\dots,\delta_n\},D_\rho=\mathrm{diag}\{\rho_1,\dots,\rho_m\},A=(a_{ij}),B=(b_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times m},C=(c_{ji}),D=(d_{ji})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ and the vectors $I=(I_i)\in\mathbb{R}^n,J=(J_j)\in\mathbb{R}^m$. Then, system (7) can be written in the following form

$$\begin{cases} x'(t)=\alpha(x(t))[-D_\delta\Phi(x(t))+Af(y(t))+Bf(y(t-\sigma(t)))+I] \\ y'(t)=\beta(y(t))[-D_\rho\Psi(y(t))+Cg(x(t))+Dg(x(t-\tau(t)))+J] \end{cases} \tag{10}$$

where the vector-valued amplification functions, decay rates, and activation functions are given by

$$\Phi(x(t)) = \mathrm{vec}(\varphi_i(x_i(t))), \Psi(y(t)) = \mathrm{vec}\left(\psi_j(y_j(t))\right)$$
$$f(y(t)) = \mathrm{vec}\left(f_j(y_j(t))\right), f(y(t-\sigma(t))) = \mathrm{vec}\left(f_j\left(y_j(t-\sigma_j(t))\right)\right)$$
$$g(x(t)) = \mathrm{vec}(g_i(x_i(t))), g(x(t-\tau(t))) = \mathrm{vec}\left(g_i(x_i(t-\tau_i(t)))\right)$$

2.2 Preliminaries

Let $\mathcal{D}$ be the set of continuous functions $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that satisfies $\varphi(0) = 0$ and there exist positive scalars $c_\varphi, \hat{c}_\varphi$ such that

$$c_\varphi \leq \frac{\varphi(u) - \varphi(v)}{u - v} \leq \hat{c}_\varphi \tag{11}$$

for all $u, v \in \mathbb{R}, u \neq v$. Clearly, the function class $\mathcal{D}$ includes all linear functions, $\varphi(u) = c_\varphi u$, where c_φ is some positive scalar. For system (7), we make the following assumptions.

(A1) $\alpha_i(\,.\,) and \beta_j(\,.\,) arecontinuousandthereexistscalars \underline{\alpha}_i, \bar{\alpha}_i, \underline{\beta}_j, \bar{\beta}_j$ such that $0 < \underline{\alpha}_i \leq \alpha_i(u) \leq \bar{\alpha}_i, 0 < \underline{\beta}_j \leq \beta_j(u) \leq \bar{\beta}_j$.

(A2) The decay rate functions $\varphi_i(.) and \psi_j(.) belongtothefunctionclass \mathcal{D}$.

(A3) Neuron activation functions $f_j(),. g_i(\,.\,) arecontinuous, f_j(0) = 0, g_i(0) = 0$, and there exist positive constants L_j^f, L_i^g such that

$$0 \leq \frac{f_j(u) - f_j(v)}{u - v} \leq L_j^f,\ 0 \leq \frac{g_i(u) - g_i(v)}{u - v} \leq L_i^g$$

for $u, v \in \mathbb{R}, u \neq v$.

Remark 2.1. It follows from condition (11) that any function $\varphi \in \mathcal{D}$ is continuous and strictly increasing. Thus, there exists continuous inverse function φ^{-1} of φ. Moreover, φ^{-1} also belongs to $\mathcal{D}$ with $c_{\varphi^{-1}} = \hat{c}_\varphi^{-1}$ and $\hat{c}_{\varphi^{-1}} = c_\varphi^{-1}$.

The following result will be useful for our later derivation.

Proposition 2.1. With the assumptions (A1)-(A3), for any initial condition defined by $x^0 \in C([-\bar{\tau}, 0], \mathbb{R}^n)$ and $y^0 \in C([-\bar{\sigma}, 0], \mathbb{R}^m)$, system (7) possesses at least a solution $\chi(t) = \mathrm{vec}(x(t), y(t))$ on $[t_0, \infty)$, which is absolutely continuous in t.

Let $\chi(t) = \mathrm{vec}(x(t), y(t))$ be a solution of system (10). If the trajectory of $\chi(t)$ is confined within the first orthant, that is, $\chi(t) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$ for all $t \geq t_0$, then $\chi(t)$ is said to be a positive solution of (10). We define the following admissible set of initial conditions for system (10)

$$\mathcal{A} = \left\{\phi = \begin{bmatrix} x^0 \\ y^0 \end{bmatrix} : x^0(\xi) \geq 0, \xi \in [-\bar{\tau}, 0], y^0(\theta) \geq 0, \theta \in [-\bar{\sigma}, 0]\right\} \tag{12}$$

Definition 2.1. System (10) is said to be positive if for any initial function $\phi \in \mathcal{A}$ and nonnegative input vector $\mathrm{vec}(I, J) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, the corresponding solution $\chi(t) = \mathrm{vec}(x(t), y(t))$ of (10) is positive.

Definition 2.2. For given input vectors $I \in \mathbb{R}^n$ and $J \in \mathbb{R}^m$, a vector $\chi^* = \mathrm{vec}(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$, where $x^* \in \mathbb{R}^n$ and $y^* \in \mathbb{R}^m$, is said to be an equilibrium point (EP) of system (10) if it satisfies the following algebraic system

$$\begin{cases} -D_\delta \Phi(x^*) + (A+B) f(y^*) + I = 0 \\ -D_\rho \Psi(y^*) + (C+D) g(x^*) + J = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Moreover, χ^* is a positive equilibrium point if it is an equilibrium point and $\chi^* \succeq 0$.

Definition 2.3. A positive EP $\chi^* = \mathrm{vec}(x^*, y^*)$ of system (10) is said to be globally exponentially stable (GES) if there exist positive scalars κ and λ such that any solution $\chi(t) = \mathrm{vec}(x(t), y(t))$ of (10) with initial condition (9) satisfies the following inequality

$$\|\chi(t) - \chi^*\| \le \kappa \|\phi - \chi^*\|_{\mathcal{C}} e^{-\lambda(t-t_0)}, \ t \ge t_0$$

2.3 Auxiliary results

A point $x \in X$ is said to be a fixed point of the mapping $f: X \to X$ if it is unchanged under the effect of f (i.e. $f(x) = x$). The following result is a form of Brouwer fixed point theorem [34].

Proposition 2.2. Suppose that M is a nonempty, convex and compact subset of $\mathbb{R}^n$ and that $f: M \to M$ is a continuous mapping. Then, f possesses at least a fixed point in M.

We recall here some properties of nonsingular M-matrix [35]. A matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is an M-matrix if it can be expressed in the form $A = sI_n - B$, where $B = (b_{ij}) \succeq 0$ and $s \ge \rho(B)$, the largest absolute value of eigenvalues of B (also known as the spectral radius of B). In the aforementioned expression, A is nonsingular M-matrix if and only if $s > \rho(B)$. The following proposition summarizes widely used properties of nonsingular M-matrix.

Proposition 2.3. Let $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ be an M-matrix. The following statements are equivalent.

(i) A is a nonsingular M-matrix.

(ii) All principal minors of A are positive.

(iii) A is inverse-positive, that is, the inverse A^{-1} exists and $A^{-1} \succeq 0$.

(iv) There exists a vector $\zeta \in \mathbb{R}^n, \zeta \succ 0$, such that $A\zeta \succ 0$.

It follows from Proposition 2.3 that if $K = (k_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is a nonnegative matrix whose spectral radius satisfies $\rho(K) < 1$, then $(I_n - K)^{-1} \succeq 0$ and there exists a positive vector $\zeta = (\zeta_i)$ such that $(I_n - K)\zeta \succ 0$. Therefore,

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\zeta_j < \zeta_i, \ i \in [n]$$

3 Main results

3.1 Positive solutions of BAM-Cohen-Grossberg neural networks with time-varying delays

In this section, we will prove that, under assumptions (A1)-(A3), any solution of system (10) with nonnegative initial states is positive provided that the weighted coefficients are nonnegative. First, by extending Lemma 1 in [32], we obtain the following auxiliary result.

Lemma 3.1. Let $\varphi \in \mathcal{D}$ and α be a continuous function such that $0 < \alpha(x) \leq \bar{\alpha}, x \in \mathbb{R}$, where $\bar{\alpha}$ is a positive constant. Consider the following problem

$$x'(t) = -\alpha(x(t))\varphi(x(t)) + w(t),\ t \geq t_0 \quad (14)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (14)$$

where $w(t)$ is a continuous function on $[t_0, \infty)$. If $w(t) \geq 0$ for $t \geq t_0$ and $x_0 \geq 0$, then it holds that $x(t) \geq 0$ for $t \geq t_0$.

The positivity of BAM-Cohen-Grossberg neural networks model (10) is presented in the following theorem.

Theorem 3.1. Let assumptions (A1)-(A3) hold and assume that the augmented matrix $\mathcal{M} \triangleq \begin{bmatrix} A & B \\ C^\top & D^\top \end{bmatrix}$ is nonnegative, $\mathcal{M} \geq 0$. Then, the BAM-CG neural networks model described by system (10) is positive. Specifically, for any initial condition $\phi \in \mathcal{A}$ and nonnegative input vector $\mathcal{J} = \mathrm{vec}(I, J) \in \mathbb{R}^{n+m}, I \geq 0, J \geq 0$, the corresponding solution satisfies $\chi(t) = (x(t), y(t)) \geq 0$ for all $t \geq t_0$.

3.2 Positive equilibria

In this section, by utilizing the Brouwer's fixed point theorem, we derive conditions by which model (10) possesses at least one positive EP for a given input vector $\mathcal{J} = \mathrm{vec}(I, J) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$. First, it can be verified from (13) that a vector $\chi^* = \mathrm{vec}(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$ is an EP of system (10) if and only if it satisfies the algebraic system

$$\begin{cases} D_\delta^{-1}((A+B)f(y^*) + I) = \Phi(x^*) \\ D_\rho^{-1}((C+D)g(x^*) + J) = \Psi(y^*) \end{cases} \quad (15)$$

Revealed by system (15), we define a mapping $\mathcal{H}: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ by

$$\mathcal{H}(\chi) = \begin{bmatrix} \Phi^{-1}\left(D_\delta^{-1}((A+B)f(y) + I)\right) \\ \Psi^{-1}\left(D_\rho^{-1}((C+D)g(x) + J)\right) \end{bmatrix} \quad (16)$$

where $\chi = \mathrm{vec}(x, y), x \in \mathbb{R}^n$ and $y \in \mathbb{R}^m$. The mapping $\mathcal{H}$ define by (16) can be written in terms of componentwise as

$$\mathcal{H}(\chi) = [h_1(y) \quad \cdots \quad h_n(y) \quad \hbar_1(x) \quad \cdots \quad \hbar_m(x)]^\top$$

where

$$h_i(y) = \varphi_i^{-1}\left(\frac{1}{\delta_i}\left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) f_j(y_j) + I_i\right)\right), i \in [n]$$

$$\hbar_j(x) = \psi_j^{-1}\left(\frac{1}{\rho_j}\left(\sum_{i=1}^{n} (c_{ji} + d_{ji}) g_i(x_i) + J_j\right)\right), j \in [m]$$

and $\varphi_i^{-1}()$,. ψ_j^{-1} (.) denote the inverse functions of $\varphi(.) and \psi(.), respectively.$

In regards to equations (15) and (16), a vector $\chi^* \in \mathbb{R}^{n+m}$ is an EP of system (10) if and only if it is a fixed point of the mapping $\mathcal{H}$, that is, $\mathcal{H}(\chi^*) = \chi^*$. Based on the Brouwer's fixed point theorem, we have the following result.

Theorem 3.2. Let assumptions (A1)-(A3) hold and assume that

$$\rho(\Lambda) < 1,\ \Lambda = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & \Lambda_1 \\ \Lambda_2 & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \tag{17}$$

where the matrices $\Lambda_1 = (\Lambda^1_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}, \Lambda_2 = (\Lambda^2_{ji}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ are defined by entries

$$\Lambda^1_{ij} = \frac{1}{\delta_i c_{\varphi i}}(|a_{ij}| + |b_{ij}|)L^f_j,\ \Lambda^2_{ji} = \frac{1}{\rho_j c_{\psi_j}}(|c_{ji}| + |d_{ji}|)L^g_i,\ i \in [n], j \in [m]$$

Then, system (10) has at least one EP for a given input vector $\mathcal{J} = \mathrm{vec}(I,J) \in \mathbb{R}^{n+m}$.

Remark 3.1. According to assumption (A3), and similar to the proof of Theorem 3.2, it can be seen that if

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C^\top & D^\top \end{bmatrix} \succeq 0 \text{ and } \mathcal{J} = \begin{bmatrix} I \\ J \end{bmatrix} \succeq 0$$

then we have

$$u_i \triangleq \frac{1}{\delta_i}\left(\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) f_j(y_j) + I_i\right) \geq 0, i \in [n]$$

and

$$v_j \triangleq \frac{1}{\rho_j}\left(\sum_{i=1}^{n} (c_{ji} + d_{ji}) g_i(x_i) + J_j\right) \geq 0, j \in [m]$$

Therefore, $h_i(y) = \varphi_i^{-1}(u_i) \geq 0, \tilde{h}_j(x) = \psi_j^{-1}(y_j) \geq 0$, for $x \in \mathbb{R}^n, x \succeq 0$, and $y \in \mathbb{R}^m, y \succeq 0$, Thus, $\mathcal{H}(\chi) \succeq 0$ for any $\chi \in \mathbb{R}^{n+m}_+$. Consequently, $\mathcal{H}(\mathbb{R}^{n+m}_+) \subset \mathbb{R}^{n+m}_+$. This shows that $\mathcal{H}: \mathcal{B}_+ \mapsto \mathcal{B}_+$, where $\mathcal{B}_+ = \mathcal{B} \cap \mathbb{R}^{n+m}_+$. Since

$$\mathcal{B}_+ = \left\{\chi \in \mathbb{R}^{n+m} : 0 \preceq \chi \preceq \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right\}$$

is also a convex compact subset of $\mathbb{R}^{n+m}$, by the Brouwer's fixed point theorem [34], the mapping $\mathcal{H}$ possesses at least a fixed point $\chi^*_+ \in \mathcal{B}_+$, which is a positive EP of system (10). We summarize this result in the following corollary.

Corollary 3.1. Let assumptions (A1)-(A3) hold. Assume that the matrix $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C^\top & D^\top \end{bmatrix}$ is nonnegative and condition (17) is satisfied. Then, for a given nonnegative input vector $\mathcal{J} = \mathrm{vec}(I,J)$, system (10) has at least a positive $EP \chi^* \in \mathbb{R}^{n+m}_+$.

Remark 3.2. Let $\Sigma = \begin{bmatrix} U & V \\ Z & W \end{bmatrix}$ be a block matrix of appropriate dimension. If the matrix W is nonsingular, that is, there exists inverse matrix W^{-1}, then we have

$$\begin{bmatrix} U & V \\ Z & W \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -W^{-1}Z & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U - VW^{-1}Z & V \\ 0 & W \end{bmatrix} \tag{18}$$

Similarly, if U is a nonsingular matrix, then we have

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -ZU^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & V \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & V \\ 0 & W - ZU^{-1}V \end{bmatrix} \tag{19}$$

Thus, it follows from Schur complement identities (18) and (19) that $\det(\Sigma) = \det(U)\det(W - ZU^{-1}V)$ and $\det(\Sigma) = \det(U - VW^{-1}Z)\det(W)$ for nonsingular matrices U and W, respectively.

Remark 3.3. Let $\widetilde{\Lambda} = \Lambda_1\Lambda_2 = (\widetilde{\Lambda}_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, where

$$\widetilde{\Lambda}_{ij} = \frac{1}{\delta_i c_{\varphi_i}} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\rho_k c_{\psi_k}} (|a_{ik}| + |b_{ik}|)(|c_{kj}| + |d_{kj}|) L_k^f L_j^g, i, j \in [n]$$

By the Schur identities, we have

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_{n+m} - \Lambda) &= \det \begin{bmatrix} \lambda I_n & -\Lambda_1 \\ -\Lambda_2 & \lambda I_m \end{bmatrix} \\ &= \lambda^m \det\left(\lambda I_n - \frac{1}{\lambda}\widetilde{\Lambda}\right) \end{aligned}$$

for any $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$. Therefore, $\lambda \in \sigma(\Lambda) \setminus \{0\}$ if and only if $\mu = \lambda^2 \in \sigma(\widetilde{\Lambda}) \setminus \{0\}$ and, consequently, $\rho(\Lambda) < 1$ if and only if $\rho(\widetilde{\Lambda}) < 1$. By this, condition (17) holds if and only if $\rho(\widetilde{\Lambda}) < 1$. Similarly, we can also conclude that condition (17) holds if and only if $\rho(\widehat{\Lambda}) < 1$, where $\widehat{\Lambda} = \Lambda_2\Lambda_1 = (\widehat{\Lambda}_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$ and

$$\widehat{\Lambda}_{ij} = \frac{1}{\rho_i c_{\psi_i}} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\delta_l c_{\varphi_l}} (|c_{il}| + |d_{il}|)(|a_{lj}| + |b_{lj}|) L_l^g L_j^f, i, j \in [m]$$

3.3 Exponential stability of positive equilibrium point

In this section, we focus on the exponential stability of positive EP of system (10). By utilizing novel comparison techniques via differential-integral inequalities, explicit conditions are derived in terms of tractable LP conditions, which can be effectively solved by various convex optimization algorithms. For convenience, we denote the following notations

$$\begin{aligned} & r_{\alpha_i} = \bar{\alpha}_i \underline{\alpha}_i^{-1},\ s_{\beta_j} = \bar{\beta}_j \underline{\beta}_j^{-1}, \\ & k_{ij}^1 = \frac{r_{\alpha_i}}{\delta_i c_{\varphi_i}} (a_{ij} + b_{ij}) L_j^f,\ \mathcal{K}_1 = (k_{ij}^1) \in \mathbb{R}^{n\times m}, \\ & k_{ji}^2 = \frac{s_{\beta_j}}{\rho_j c_{\psi_j}} (c_{ji} + d_{ji}) L_i^g,\ \mathcal{K}_2 = (k_{ji}^2) \in \mathbb{R}^{m\times n}, \\ & M = \mathcal{K}_1\mathcal{K}_2 = (m_{ik}),\ \widetilde{M} = \mathcal{K}_2\mathcal{K}_1 = (\widetilde{m}_{jl}), \\ & m_{ik} = \frac{r_{\alpha_i}}{\delta_i c_{\varphi_i}} \sum_{j=1}^{m} \frac{s_{\beta_j}}{\rho_j c_{\psi_j}} (a_{ij} + b_{ij})(c_{jk} + d_{jk}) L_j^f L_k^g, i, k \in [n], \end{aligned}$$

Theorem 3.3. Let assumption (A1)-(A3) hold. Assume that the matrix $\mathcal{M} = \begin{bmatrix} A & B \\ C^\top & D^\top \end{bmatrix}$ is nonnegative and one of the following LP conditions is satisfied:
(i) There exists a vector $\xi \in \mathbb{R}^n, \xi = (\xi_k) \succ 0$, such that

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{s_{\beta_j}}{\rho_j c_{\psi_j}} (a_{ij} + b_{ij}) L_j^f \sum_{k=1}^{n} (c_{jk} + d_{jk}) L_k^g \xi_k < \frac{\delta_i c_{\varphi_i}}{r_{\alpha_i}} \xi_i, i \in [n] \tag{22}$$

(ii) There exists a vector $\eta \in \mathbb{R}^m, \eta = (\eta_l) \succ 0$, such that

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{r_{\alpha_i}}{\delta_i c_{\varphi_i}} (c_{ji} + d_{ji}) L_i^g \sum_{l=1}^{m} (a_{il} + b_{il}) L_l^f \eta_l < \frac{\rho_j c_{\psi_j}}{s_{\beta_j}} \eta_j, j \in [m] \tag{23}$$

Then, for any nonnegative input vector $\mathcal{J} = \mathrm{vec}(I, J) \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, system (10) has a unique positive $EP\chi^* \in \mathbb{R}_+^{n+m}$, which is GES for any delays $\tau_i(t), \sigma_j(t)$ subject to condition (8).

Remark 3.4. The result of Theorem 3.3 encompasses the results of Theorem 1 in [21] and Theorem 3 in [32] as some special cases. More specifically, since BAM-CG neural networks described by system (10) include both BAM neural networks and Hopfield neural networks, the obtained results in [21,32] can be revoked by significantly simplifying the derivation process of Theorem 3.3.

Remark 3.5. System (7) can be regarded as a type of nonlinear functional differential equations. In this regard, certain aspects of the comparison principle are effective and widely used to derive domination property of solutions [36,37]. However, different from existing results developed for abstract nonlinear systems, e.g., in [36,37], it is more challenging to derive both the existence and exponential convergence of positive equilibrium for positive nonlinear systems in the structure of neural networks with delays.

4 Simulations

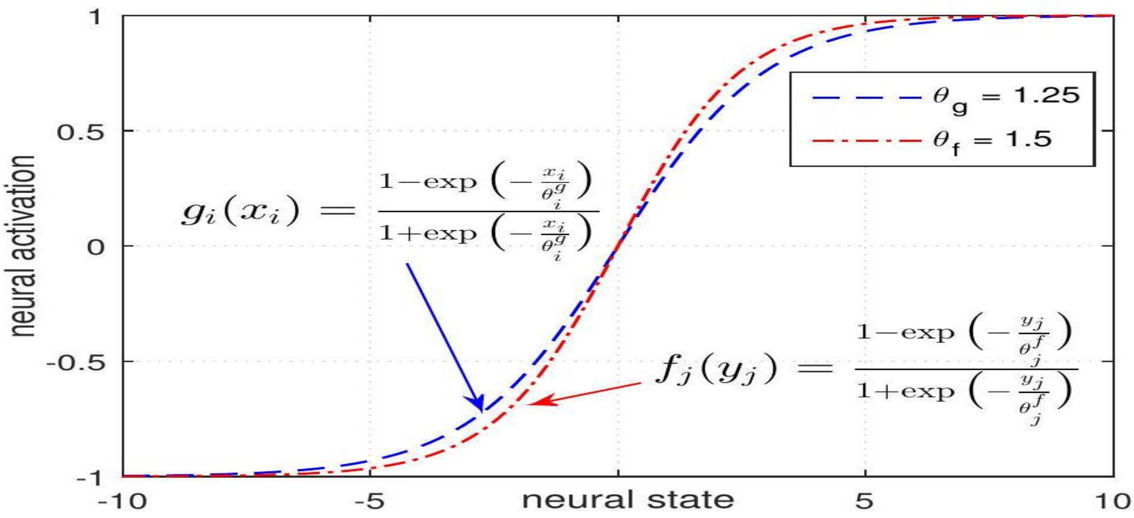


Fig. 1: Behavior of neural activation functions

Consider a cooperative-type BAM-CG neural networks model described by system (7) with Boltzmann sigmoid activation functions

$$f_j(y_j) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{y_j}{\theta_j^{\dagger}}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{y_j}{\theta_j^{J}}\right)}, g_i(x_i) = \frac{1 - \exp\left(-\frac{x_i}{\theta_i^{j}}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{x_i}{\theta_i^{j}}\right)}, i = 1,2,3, j = 1,2 \tag{24}$$

where $\theta_j^f > 0$ and $\theta_i^g > 0$ are weighted coefficients. An example of neuron activation functions is represented in Fig. 1. The neural amplification and decay rate functions are given by

$$\alpha_i(x_i) = 1 + 0.25\cos(0.5x_i),\ \beta_j(y_j) = 1 + 0.25|\sin(0.5y_j)| \tag{25}$$

and

$$\varphi_i(x_i) = 2x_i + \sin^2(0.25x_i),\ \psi_j(y_j) = 2y_j - \sin^2(0.25y_j) \qquad (26)$$

respectively. It is clear that assumptions (A1)-(A2) are fulfilled, where $\underline{\alpha}_i = 0.75, \underline{\beta}_j = 1$, $\bar{\alpha}_i = \bar{\beta}_j = 1.25, c_{\varphi_i} = c_{\psi_j} = 1.75$ and $\hat{c}_{\varphi_i} = \hat{c}_{\psi_j} = 2.25$. In addition, since

$$f_j'(y_j) = \frac{2}{\theta_j^f} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{y_j}{\theta_j^f}\right)}{\left(1 + \exp\left(-\frac{y_j}{\theta_j^f}\right)\right)^2} > 0$$

and

$$\sup_{s \in (0,\infty)} \frac{s}{(1+s)^2} = \frac{1}{4}$$

it can be verified that assumption (A3) is satisfied with $L_j^f = \frac{1}{2\theta_j^f}$ and $L_i^g = \frac{1}{2\theta_i^g}$. For illustrative purpose, the system parameters are specified as follows

$$\theta_j^f = 1.5, \theta_i^g = 1.25, D_\delta = \delta I_3, D_\rho = \rho I_2, \delta = 1.52, \rho = 1.66,$$

$$A = \begin{bmatrix} 2.25 & 1.16 \\ 0.95 & 1.31 \\ 1.12 & 1.56 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.52 & 1.14 \\ 1.48 & 0.92 \\ 0.64 & 0.88 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.60 & 1.28 & 1.32 \\ 1.16 & 0.47 & 0.85 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1.15 & 0.58 & 0.72 \\ 0.54 & 1.32 & 0.92 \end{bmatrix}$$

Then, we have

$$\mathcal{K}_1 = \begin{bmatrix} 0.5785 & 0.4804 \\ 0.5075 & 0.4657 \\ 0.3676 & 0.5096 \end{bmatrix}, \mathcal{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.3012 & 0.3201 & 0.3511 \\ 0.2926 & 0.3081 & 0.3046 \end{bmatrix}$$

$$M = \mathcal{K}_1\mathcal{K}_2 = \begin{bmatrix} 0.3148 & 0.3332 & 0.3495 \\ 0.2891 & 0.3060 & 0.3201 \\ 0.2598 & 0.2747 & 0.2843 \end{bmatrix}$$

Since

$$(I_3 - M)^{-1} = \begin{bmatrix} 4.4120 & 3.6098 & 3.7689 \\ 3.1311 & 4.3126 & 3.4577 \\ 2.8035 & 2.9657 & 4.0927 \end{bmatrix} \succ 0$$

by Proposition 2.3, $I_3 - M$ is a nonsingular M-matrix. Thus, the LP-based condition (22) is feasible. By Theorem 3.3, for a given input vector $\mathcal{J} = \mathrm{vec}(I, J)$, where $I \in \mathbb{R}_+^3$ and $J \in \mathbb{R}_+^2$, system (10) has a unique positive EP χ^* which is GES for any bounded time-varying delays.

For $\mathcal{J} = (0.5, 2.0, 1.5, 3.0, 2.5)^\top$, by solving system (13) with Matlab Symbolic Toolbox, we obtain $\chi^* = (0.9573, 1.3551, 1.1252, 1.7193, 1.4986)^\top$. A simulation result of 20 sample state trajectories for the delays $\tau_i(t) = 4|\sin(100\pi t)|$ and $\sigma_j(t) = 5|\cos(10\pi t)|$ is portrayed in Fig. 2. The corresponding phase diagram is also presented in Fig. 3. Clearly, the conducted state trajectories of the system are positive and converge to the unique positive EPχ^*, which validates the obtained theoretical results.

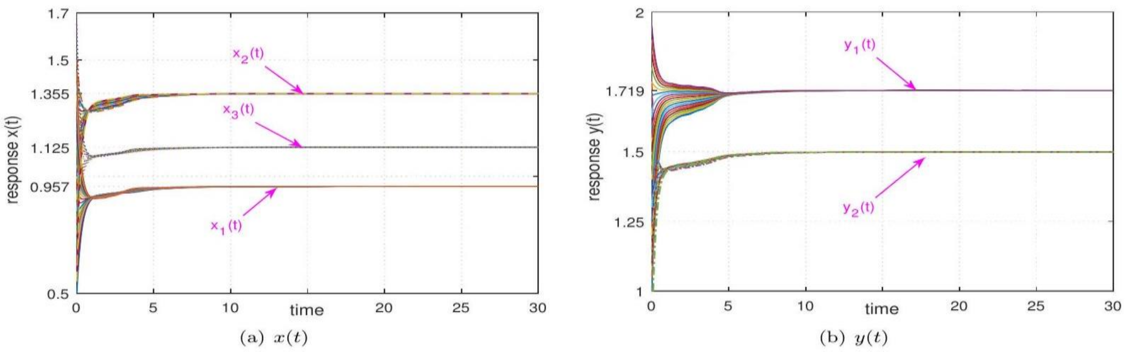


Fig. 2: Convergence of state trajectories to the positive EP χ^* with the input vector $\mathcal{J} = (0.5,2.0,1.5,3.0,2.5)^\top$ and delays $\tau_i(t) = 4|\sin(10\pi t)|, \sigma_j(t) = 3|\cos(10\pi t)|$

5. Concluding remarks

The problem of exponential stability of positive nonlinear systems representing BAM-CohenGrossberg neural networks with time-varying delays has been investigated in this paper. A novel approach based on comparison techniques via differential-integral inequalities has been presented. By utilizing the proposed method and the theory of M-matrix, the existence and exponential stability conditions of a positive equilibrium have been derived in term of tractable LP conditions, which can be effectively solved by various convex algorithms. A numerical example with simulations has been presented to demonstrate the effectiveness of the obtained theoretical results.

The results presented in this paper can be regarded as some extensions of existing ones in the literature [21,32,38]. However, it seems that the obtained results cannot be simply extended to certain models of BAM-Hopfield or BAM-CG inertial neural networks with delays. How to extend the proposed method in this paper to nonlinear systems involving BAM-CGinertial neural networks proves to be an interesting and challenging issue. This will be further investigated in future works.

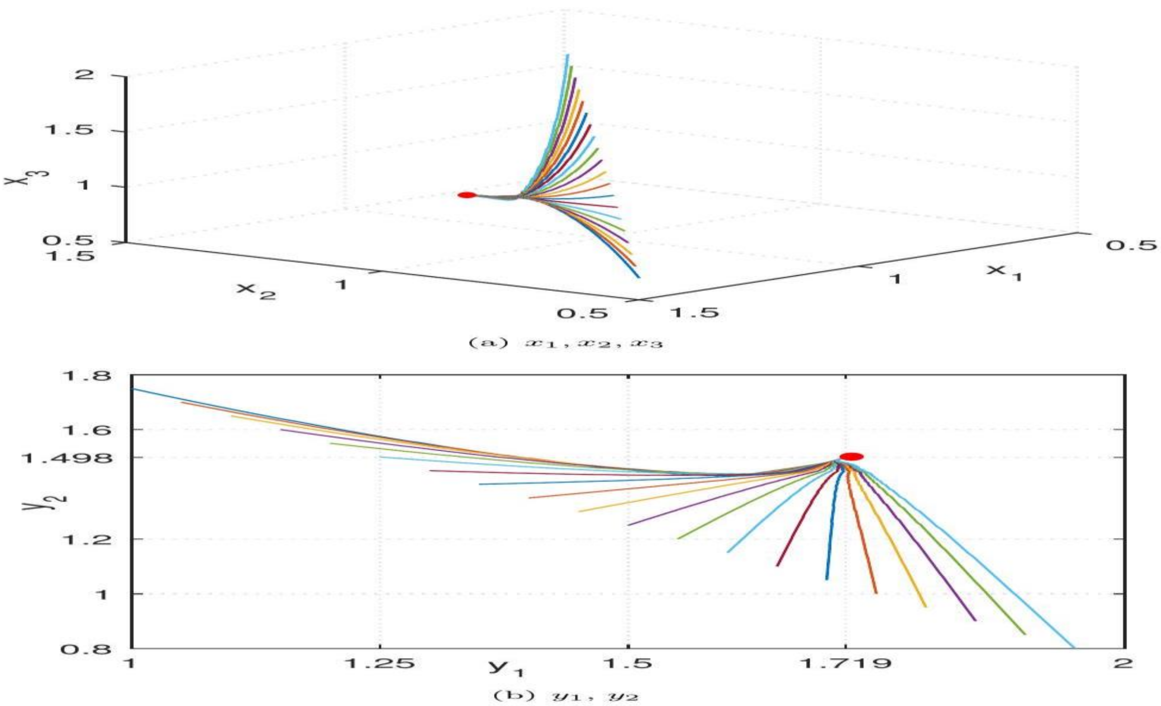


Fig. 3: Convergence of state trajectories to the positive EP χ^* in phase space

REFERENCES

[1] Farina, L, Rinaldi, S (2000) Positive Linear Systems: Theory and Applications. John Wiley & Sons, New York

[2] Jacquez, J (1985) Compartmental Analysis in Biology and Medicine. University of Michigan Press, Ann Arbor, MI

[3] Smith, H (2008) Monotone Dynamical System: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems. Amer Math Soc., Providence, USA

[4] Altafini, C (2013) Consensus problems on networks with antagonistic interactions. IEEE Trans Autom Control 58:935-946

[5] Valcher, ME, Zorzan, I (2018) State-feedback stabilization of multi-input compartmental systems. Syst Control Lett 119:81-91

[6] Briat, C (2018) Stability and performance analysis of linear positive systems with delays using input-output methods. Int J Control 91:1669-1692

[7] Mrugalski M et al (2016) Neural network-based robust actuator fault diagnosis for a nonlinear multi-tank system. ISA Trans 61:318-328

[8] Hien, LV, Son, DT (2015) Finite-time stability of a class of non-autonomous neural networks with heterogeneous proportional delays. Appl Math Comput 251:14-23

[9] Arik, S (2016) Dynamical analysis of uncertain neural networks with multiple time delays. Int J Syst Sci 47:730-739

[10] Hai-An, LD, Hien, LV, Loan, TT (2017) Exponential stability of non-autonomous neural networks with heterogeneous time-varying delays and destabilizing impulses. Vietnam J Math 45:425-440

[11] Lee, TH, Trinh, H, Park, JH (2018) Stability analysis of neural networks with time-varying delay by constructing novel Lyapunov functionals. IEEE Trans Neural Netw Learn Syst 29:4238-4247

[12] Hien, LV (2021) Positivity and Stability of Nonlinear Time-Delay Systems in Neural Networks. In: Park J. (eds) Recent Advances in Control Problems of Dynamical Systems and Networks. Springer, Cham

[13] Hien, LV (2017) On global exponential stability of positive neural networks with timevarying delay. Neural Netw 87:22-26

[14] Hien, LV, Hai-An, LD (2019) Positive solutions and exponential stability of positive equilibrium of inertial neural networks with multiple time-varying delays. Neural Comput Appl 31:6933-6943

[15] Hien, LV et al (2014) Existence and global asymptotic stability of positive periodic solution of delayed Cohen-Grossberg neural networks. Appl Math Comput 240:200-212

[16] Hien, LV, Hai-An, LD (2019) Exponential stability of positive neural networks in bidirectional associative memory model with delays. Math Meth Appl Sci 42:6339-6357

KHAI THÁC MỘT SỐ YẾU TỐ LỊCH SỬ TOÁN HỌC TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

TS. Nguyễn Thị Thu Hà [1]

[1] Phó Hiệu trưởng Trường Đại học Hải Dương

Email:uhdhanguyenthu76.edu@gmail.com

Đặt vấn đề

Toán học (TH) là môn học có vai trò quan trọng trong chương trình giáo dục phổ thông, giúp học sinh phát triển năng lực và phẩm chất trí tuệ, rèn luyện tư duy trừu tượng, tư duy chính xác, hợp logic, cũng như phương pháp khoa học trong suy luận và học tập. Tuy nhiên, đây cũng là môn học mang tính trừu tượng cao và khá khô khan. Nhiệm vụ của giáo viên dạy toán là làm cho giờ giảng thêm sinh động, thu hút sự chú ý và kích thích nhu cầu khám phá tri thức của học sinh. Để thực hiện điều này, khi giảng dạy từng vấn đề cụ thể, giáo viên có thể dành một vài phút để giới thiệu về lịch sử của vấn đề và các nhà toán học liên quan.

Lịch sử toán học (TH) là khoa học về các quy luật khách quan của sự phát triển toán học TH: xác định rõ các phương pháp, các khái niệm, tư tưởng, lý thuyết TH khác nhau đã được phát sinh, hình thành như thế nào trong lịch sử; nghiên cứu phát hiện các mối liên hệ giữa TH với nhu cầu và hoạt động thực tiễn của con người; với sự phát triển của các khoa học khác;… Mỗi kiến thức TH đều mang những yếu tố lịch sử về nguồn gốc phát sinh, phát triển, nhu cầu phát sinh, người phát minh,…

Tuy nhiên, thực trạng dạy học toán ở trường phổ thông hiện nay cho thấy các giáo viên ít quan tâm đến khía cạnh này. Kiến thức của giáo viên phổ thông về vấn đề này còn hạn chế; họ chưa có cơ hội tiếp cận, nghiên cứu, hay tìm hiểu sâu về lịch sử toán học, mặc dù đây là một khía cạnh quan trọng đối với người học, giảng dạy, và nghiên cứu toán học.

Nghiên cứu quan tâm đến 3 vấn đề: Vai trò của khai thác tri thức lịch sử toán trong quá trình dạy học toán ở trường phổ thông; Thực trạng việc khai thác lịch sử TH trong dạy học môn Toán ở một số trường phổ thông trên địa bàn thành phố Hải Dương và một số giải pháp khai thác lịch sử toán học trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Vai trò của khai thác tri thức lịch sử toán trong quá trình dạy học toán ở trường phổ thông

2.1.1. Đối với giáo viên

Đối với người làm công tác giảng dạy, việc hiểu rõ các sự kiện lịch sử cơ bản của bộ môn mình giảng dạy, hiểu rõ các quy luật phát triển của khoa học liên quan đến bộ môn là rất cần thiết.

Mỗi chúng ta khi đọc một tài liệu về TH đều thấy thích thú với những nét phác hoạ về lịch sử phát triển của vấn đề, về những ứng dụng của nó vào việc giải quyết các bài toán được đặt ra trước xã hội loài người, về ý nghĩa của những vấn đề trong thực tiễn đời sống đối với sự phát triển của TH. Và chúng ta đã biết rằng các bài toán mà người xưa đã giải hàng trăm năm trước đây cũng là những bài toán rất lý thú đối với HS.

Thầy giáo dạy toán cần biết được các vấn đề như: con người đã lao động như thế nào để sáng tạo ra các khái niệm TH? Các hình ảnh cụ thể trực quan là cần thiết như thế nào trong các bước đầu tiên? Các lý thuyết TH trừu tượng và các chứng minh chặt chẽ đã được xây dựng và tích luỹ như thế nào?… Lịch sử TH cho ta thấy một cách sâu sắc những khó khăn đặc biệt mà loài người đã phải vượt qua trong quá trình phát triển TH.

Lịch sử TH có thể giúp cho thầy giáo toán trong quá trình dạy học là biến toán học thành một môn học hấp dẫn, lôi cuốn đối với HS, làm cho các giờ học toán không phải là một gánh nặng đối với HS, mà là một nguồn vui, một cái gì đẹp đẽ, có thể giúp ích cho HS trong cuộc sống, trong công tác sau này.

Để giúp HS hiểu rõ lịch sử toán, người GV có thể tích hợp vào các bài giảng của mình lời giới thiệu ngắn gọn, đúng lúc những nét lịch sử của vấn đề, làm cho giờ học thêm sinh động. Các buổi nói chuyện về lịch sử TH - lịch sử phát minh, tiểu sử các nhà TH lớn sẽ có tác dụng trong việc khêu gợi khả năng sáng tạo của HS, động viên họ, giúp họ củng cố lòng tin ở bản thân mình.

Vì vậy, việc tìm hiểu các kiến thức về lịch sử toán nói chung và lịch sử của vấn đề có liên quan đến chương trình toán THPT nói riêng là một trong những nhiệm vụ tự học, tự bồi dưỡng của một người GV toán

2.1.2. Đối với học sinh phổ thông

Trong quá trình học toán, khi tiếp cận với các phần kiến thức toán, hầu hết học sinh đều ở thế bị động, HS nắm bắt vấn đề một cách thụ động, máy móc mà có thể không biết được bản chất của vấn đề, nguồn gốc của vấn đề đó xuất phát từ đâu, khi nào và GV chỉ yêu cầu HS nắm được kiến thức, khái niệm để giải quyết những bài toán cụ thể có liên quan.

Ví dụ: Trong chương trình hình học lớp 8, HS phải công nhận và thuộc công thức tính chu vi đường tròn C = 2лR, công thức tính diện tích hình tròn: $S = лR^2$ mà không cần biết lịch sử số л. Nếu HS có thắc mắc thì rất ít thầy cô giáo có thể giải thích được. Đến khi HS học đại số lớp 10, HS được làm quen với khái niệm mới về số đo góc và cung lượng giác là radian, công thức đổi số đo từ độ sang radian và ngược lại. Khi dẫn dắt HS đến công thức này, GV phải sử dụng đến công thức tính chu vi đường tròn C = 2лR. Từ công thức này, HS có thể đổi số đo của một góc từ độ sang radian, từ radian sang độ nhưng các em cũng không biết đươc nguồn gốc của số л xuất phát từ đâu.

Khi học về lượng giác, ngoài những chỉ dẫn trong sách giáo khoa, nếu được bổ sung thêm các kiến thức về lịch sử của vấn đề, HS sẽ thấy rõ rằng lượng giác xuất phát từ nhu cầu của thực tế và những kiến thức đó được sử dụng để tính toán trong các ngành thiên văn, vật lý, kỹ thuật,… qua đó nảy sinh động cơ học tập cho HS. Nhờ những kiến thức về lịch sử toán, HS thấy rằng TH phát sinh và phát triển do nhu cầu thực tế của con người. Thực tế cho thấy có một số HS đã ảo tưởng cho rằng TH là độc lập với thực tại, không liên hệ gì với thực tế. Như vậy, kiến thức về lịch sử TH rất quan trọng, khi nắm được nguồn gốc xuất phát những kiến thức, các em sẽ hiểu rằng: TH luôn luôn xuất phát từ thực tế, đời sống của con người và nó quay trở lại phục vụ cuộc sống của con người và TH rất gần gũi với thực tế chứ nó không xa rời thực tế như chúng ta vẫn lầm tưởng.

2.2. Thực trạng việc khai thác lịch sử toán học trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông trên địa bàn thành phố Hải Dương

TH là một môn khoa học cơ bản, nhiệm vụ của người GV là truyền thụ kiến thức cho HS, HS tiếp nhận kiến thức, biến kiến thức của nhân loại thành kiến thức của mình. Rất ít khi HS thắc mắc rằng kiến thức này xuất phát từ đâu, khi nào. Còn người GV thực sự cũng ít khi quan tâm đến lịch sử của vấn đề, nếu có cũng chỉ tìm hiểu qua những chỉ dẫn trong SGK. Do khuôn khổ SGK có hạn nên những chỉ dẫn trong SGK không có nhiều và cũng chưa thực sự đầy đủ cả về chất lẫn về lượng, hầu như là chỉ nêu lên chứ chưa nói rõ được từ điểm xuất phát cho đến sự phát triển của vấn đề. Nếu muốn quan tâm hay tìm hiểu về lịch sử toán cũng gặp khó khăn trong vấn đề tài liệu tham khảo, hiện nay trong các hiệu sách rất ít sách về lịch sử toán, tìm kiếm thông tin trên mạng thì không đầy đủ, hoặc là tiếng nước ngoài. Còn một lý do rất quan trọng dẫn đến việc dạy nội dung lịch sử toán chưa được quan tâm nhiều trong trường Phổ thông đó là thời lượng trong phân phối chương trình của Bộ GD&ĐT chỉ vừa đủ thậm chí là chưa đủ để GV truyền thụ kiến thức, tổ chức các hoạt động cho HS. Vì thế, GV hầu như không có thời gian để cho HS tìm hiểu về lịch sử toán trong các giờ học.

Để có thêm thông tin, chúng tôi đã tiến hành thăm dò ý kiến của một số GV dạy môn Toán của một số trường phổ thông trên địa bàn thành phố Hải Dương về việc dạy lịch sử toán trong nhà trường Phổ thông và hiểu biết của HS về một số kiến thức lịch sử TH. Từ kết quả thăm dò, chúng tôi nhận thấy:

Hầu hết HS không quan tâm (65%) đến lịch sử TH. Mặc dù các em thấy rõ rằng lịch sử TH rất quan trọng (45%) đối với người học toán. Các thầy cô giáo có yêu cầu HS về nhà đọc chỉ dẫn lịch sử trong SGK nhưng rất ít.

Trong các giờ toán, các thầy cô không thường xuyên dành thời gian để giới thiệu về lịch sử của vấn đề mà mình đang giảng dạy.

Đối với những câu hỏi về lịch sử toán, tỉ lệ trả lời đúng của HS rất ít, mặc dù những câu hỏi này rất đơn giản và có nội dung nằm trong các chỉ dẫn lịch sử của SGK.

Qua đó cho thấy GV toán ở trường phổ thông hiện nay tuy có quan tâm đến việc truyền thụ tri thức về lịch sử toán cho HS nhưng rất ít, thường bỏ qua hoặc chỉ đơn thuần là dặn HS về nhà tự đọc, tự tìm hiểu, rất ít khi dành thời gian trên lớp để nói về lịch sử của vấn đề mà HS đang học. Về nguyên nhân, có thể do điều kiện khách quan tác động như nội dung chương trình khá nặng, khuôn khổ SGK có hạn, có thể do nguyên nhân chủ quan như người GV chưa thực sự thấy được tầm quan trọng của lịch sử toán, chưa có ý thức tự học, tự bồi dưỡng kiến thức về vấn đề này; Việc đổi mới SGK và đổi mới kiểm tra đánh giá chưa đồng bộ; Việc đổi mới PPDH ở một bộ phận GV còn hình thức, chưa hiệu quả, chưa phát huy được tính tự giác, sáng tạo, tinh thần tự học, tự tìm hiểu của HS.

Về nguyên nhân, ý kiến các GV cho rằng:

- Do không có thời gian: 25%
- Do không có tư liệu: 30%
- Do chưa biết cách: 60%

Vì thế nên chúng ta cần phải trang bị tri thức lịch sử toán cho GV và tích hợp tri thức lịch sử toán vào các giờ dạy toán và các hoạt động khác.

2.3. Một số giải pháp khai thác lịch sử toán học trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông

2.3.1. Cung cấp nguồn tài liệu và đưa vào nội dung sinh hoạt tổ chuyên môn

Trước hết, GV phải đọc kỹ các chỉ dẫn lịch sử, các bài đọc thêm trong SGK, ngoài ra các thầy cô có thể tìm hiểu thêm trong các tài liệu, các sách tham khảo, tìm kiếm thông tin trên mạng để mở rộng thêm về những vấn đề đó. Mỗi người GV ngoài việc cập nhật thông tin, sử dụng thành thạo máy tính để phục vụ cho việc giảng dạy, trau dồi kiến thức còn có thể khai thác thông tin trên Internet kiến thức về lịch sử toán học, sử dụng phần mềm hỗ trợ cho việc giảng dạy.

Thông thường các bài chỉ dẫn lịch sử hay các bài đọc thêm trong SGK rất ngắn gọn, chưa đầy đủ thông tin, chưa nói rõ hết được nguồn gốc và sự phát triển của vấn đề. Người GV phải có nhiệm vụ tìm hiểu thông tin để làm sáng tỏ những điều đó.

Đồng thời, trong nhiệm vụ của năm học, hàng tuần GV phải sinh hoạt tổ chuyên môn, ngoài việc tổ chức dự giờ, thăm lớp, trao đổi kinh nghiệm, đánh giá lẫn nhau, các GV cũng có thể trao đổi, học hỏi lẫn nhau để có thêm kiến thức về lịch sử TH, về lịch sử vấn đề mà mình đang giảng dạy.

Mỗi một tháng dành một buổi sinh hoạt tổ chuyên môn về chủ đề lịch sử TH. Tổ trưởng căn cứ vào tiến độ thực hiện chương trình, giao cho GV chuẩn bị. Tại mỗi buổi sinh hoạt tổ chuyên môn, GV trao đổi về các nội dung lịch sử toán sẽ có trong chương trình giảng dạy trong những tuần kế tiếp. Chia tổ thành các nhóm: Nhóm GV giảng dạy toán lớp nào thì có nhiệm vụ tìm hiểu về lịch sử vấn đề hay các nhà TH có liên quan đến các vấn đề toán của chương trình lớp đó. Trong buổi sinh hoạt tổ chuyên môn về lịch sử TH, các GV có thể thảo luận, đề cập đến lịch sử của các vấn đề TH mà các GV đang giảng dạy trong từng tháng từ lớp 10 đến lớp 12 và cung cấp các tư liệu để dần dần xây dựng thành ngân hàng thông tin dùng cho cả tổ.

2.3.2. Động viên giáo viên đăng kí đề tài, tìm hiểu sưu tầm về tri thức lịch sử toán có liên quan đến chương trình toán phổ thông.

Vào đầu năm học, các GV trong tổ toán đăng ký đề tài, sáng kiến kinh nghiệm về việc sưu tầm kiến thức lịch sử toán có liên quan đến chương trình toán phổ thông hoặc các giải pháp truyền thụ tri thức lịch sử toán cho HS, cuối năm nghiệm thu đề tài. Khác với việc trao đổi ở tổ chuyên môn, để là các đề tài về lịch sử toán liên quan đến chương trình, SGK toán phổ thông đòi hỏi GV phải có một quá trình làm việc nghiêm túc, khoa học.

Kết quả của đề tài sẽ là các báo cáo tri thức lịch sử toán một cách hệ thống, đầy đủ với lượng thông tin phong phú, đa dạng không chỉ văn bản mà là cả các tranh ảnh về các nhà toán học. Đây sẽ là tài liệu bổ ích không chỉ cho cá nhân mà cho các đồng nghiệp, hỗ trợ nguồn tài liệu cho giải pháp 1.

2.3.3. Lồng ghép tri thức lịch sử toán vào các giờ học toán trên lớp

Như trong phần thực trạng dạy học lịch sử toán ở trường Phổ thông đã nêu, thời lượng mà phân phối chương trình của Bộ đã đưa ra chỉ đủ để GV truyền thụ kiến thức, tổ chức các hoạt động nhằm củng cố kiến thức, rèn luyện kỹ năng cho họ sinh, thậm chí còn bị thiếu thời gian đối với những lớp mà trình độ của HS chưa cao, tính tích cực của HS chưa được phát huy. Nhưng nếu người GV thực sự quan tâm và hiểu rõ được vai trò của lịch sử toán đối với người học toán thì vẫn có thể dành một chút thời gian để nói về lịch sử vấn đề mà mình chuẩn bị dạy. Hoặc trong khi giảng dạy một vấn đề nào đó, người GV có thể kết hợp giới thiệu về lịch sử ra đời và sự phát triển của vấn đề mà HS đang được học. Trong mỗi phần dạy, GV yêu cầu HS đọc vắn tắt chỉ dẫn lịch sử trong SGK, ngoài ra, người GV cũng cần phải tìm hiểu kỹ về vấn đề đó để bổ sung thêm kiến thức cho HS ngoài những điều mà SGK đã nêu.

Ví dụ như HS đã được làm quen với số π ở THCS khi các em học công thức tính chu vi và diện tích hình tròn, lên lớp 10 các em lại gặp lại số π trong nhiều phần kiến thức cả đại lẫn hình, các em công nhận và sử dụng nó một cách máy móc mà không hiểu được nguồn gốc, lịch sử ra đời và sự phát triển của số π . Khái niệm số π có xuất phát từ thực tế đời sống hay không? Nó ra đời khi nào? cách tính số π như thế nào? Có ứng dụng trong thực tế như thế nào? Người GV có thể tranh thủ thời gian giới thiệu về số π , sự ra đời và phát triển của số π, người GV có thể trả lời được tất cả các câu hỏi đó trên cơ sở đã tìm hiểu về số π .

2.3.4. Tổ chức các hoạt động ngoại khoá toán học, các trò chơi cho học sinh trong những hoạt động ngoài giờ lên lớp

Hoạt động giáo dục ngoài giờ lên lớp là một bộ phận của quá trình giáo dục ở nhà trường THPT, góp phần vào nhiệm vụ đổi mới chương trình và thực hiện chủ chương "*xây dựng nhà trường thân thiện, học sinh tích cực*" của bộ giáo dục. Đó là những hoạt động giáo dục được tổ chức ngoài giờ học trên lớp, đó là sự tiếp nối, bổ sung, hỗ trợ, hoạt động dạy học trên lớp, là con đường gắn lý thuyết với thực tiễn, tạo nên sự thống nhất giữa nhận thức và hành động, góp phần hình thành tình cảm, niềm tin đúng đắn của HS. Việc tổ chức các hoạt động ngoại khóa TH cũng không nằm ngoài mục đích đó. Hơn nữa, hoạt động này giúp cho các em có thêm kiến thức về toán học nói chung và về lịch sử toán nói riêng, giúp cho các em thêm yêu môn toán hơn, tạo hứng thú trong các giờ học toán.

Về các công tác ngoại khóa về TH nói riêng, việc giảng dạy TH trong nội khóa cần được bổ sung bằng các hình thức công tác ngoại khóa nhằm các mục đích chủ yếu sau đây.

+ Tăng cường cho HS lòng ham thích, hào hứng học toán, gây một không khí học toán sôi nổi trong nhà trường.

+ Củng cố các kiến thức nội khóa, bổ sung một số điển cần thiết và trong chừng mực nào đó, có thể mở rộng phạm vi các kiến thức trong chương trình. Củng cố và bổ sung một số kiến thức về lịch sử toán, giúp cho HS thêm yêu môn toán hơn.

+ Tăng cường giáo dục theo hướng kỹ thuật tổng hợp.

+ Tăng cường giáo dục cho học sinh thói quen công tác độc lập (Đọc sách, thuyết trình, tự nghiên cứu), giáo dục đức tính và tư tưởng xã hội chủ nghĩa (tinh thần tập thể, tháo vát...)

+ Bồi dưỡng các HS giỏi nhằm phát triển, đào tạo nhân tài, giúp đỡ các HS kém về TH.

Ngoài ra, để khai thác các tri thức lịch sử TH trong dạy học Toán ở phổ thông, GV toán có thể kết hợp với các GV khác để tổ chức các trò chơi TH trong các giờ học tự chọn, trong các hoạt động cắm trại, các giờ sinh hoạt Đoàn, các hoạt động nhằm vào các ngày lễ, . . . kết hợp với GV chủ nhiệm của các lớp để tổ chức các buổi hoạt động giáo dục ngoài giờ lên lớp theo chủ đề của từng tháng, xen kẽ các trò chơi toán học vào các hoạt động, giúp cho buổi ngoại khóa thêm sinh động, phong phú và bổ ích hơn đối với HS.

3. Kết luận

Khai thác các tri thức lịch sử TH trong dạy học Toán ở phổ thông là vấn đề cấp thiết. Nghiên cứu này đã phận tích và khẳng định vai trò của việc khai thác các tri thức lịch sử TH trong dạy học Toán ở phổ thông và nêu lên thực trạng của nội dung này trong dạy học môn Toán ở trường phổ thông tại thành phố Hải Dương. Nghiên cứu cũng đã đề xuất một số giải pháp nhằm giúp GV thuận lợi, chủ động thu thập, chủ động triển khai dạy học bài học hoặc chủ đề môn Toán nâng cao hiệu quả dạy học môn Toán của mình tại trường phổ thông.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Killen, C. (2018). *Collaboration and Coaching: Powerful Strategies for Developing Digital Capabilities*. In Digital Literacy Unpacked (pp. 29-44). Facet.

[2] Bộ Giáo dục và Đào tạo, (2018), *Thông tư số 20/2018/ TT-BGDĐT quy định Chuẩn nghề nghiệp giáo viên cơ sở giáo dục phổ thông*, Hà Nội.

[3] Hoàng Chúng, Võ Ứng Đoài, Nguyễn Văn Bằng, *Phương pháp tổng quát giảng dạy toán học ở trường Phổ thông*, NXB Giáo dục Hà Nội - 1960.

[4] Nguyễn Bá Kim, *Phương pháp dạy học môn toán* (tái bản lần thứ ba), NXB Đại học Sư phạm, 2007.

[5] Giáo sư Nguyễn Cang, Lịch sử toán học, NXB Trẻ.

[6] Đảng Cộng sản Việt Nam, *Nghị quyết hội nghị lần thứ IV BCHTƯ khóa VII về tiếp tục đổi mới sự nghiệp giáo dục và đào tạo*, Tạp chí NCGD, 2/1994.

[7] Phạm Gia Đức, Đỗ Huy Thái, *Đề cương giáo trình Phương pháp giảng dạy môn toán*, Tủ sách Sư phạm - 1972.

GIẢNG DẠY GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ TRONG HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 1 Ở CÁC TRƯỜNG SƯ PHẠM THEO ĐỊNH HƯỚNG MÔN TOÁN TRONG CHƯƠNG TRÌNH GIÁO DỤC PHỔ THÔNG 2018

TS. Phạm Ngọc Hoa [1]

[1] Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Dương

TÓM TẮT

Khái niệm giới hạn là một trong những khái niệm cơ sở của Giải tích toán học, cũng có thể nói giải tích bắt đầu bằng khái niệm giới hạn. Theo Chương trình giáo dục phổ thông 2018, nội dung giới hạn của dãy số và giới hạn của hàm số được giảng dạy ở lớp 11. Có một khó khăn nhất định về mặt tâm lý khi hình thành khái niệm giới hạn cho học sinh và cũng như vậy khi giảng dạy nội dung về giới hạn cho sinh viên ngành Sư phạm Toán học trong học phần Giải tích 1. Vì vậy, việc tổ chức giảng dạy nội dung về giới hạn của dãy số như thế nào trong học phần Giải tích 1 là một vấn đề cần được quan tâm nghiên cứu. Dưới đây, tôi đề xuất quy trình tổ chức giảng dạy Giới hạn của dãy số trong học phần Giải tích 1 cho sinh viên ngành Sư phạm Toán học theo định hướng môn Toán trong chương trình giáo dục phổ thông 2018.

ABSTRACT

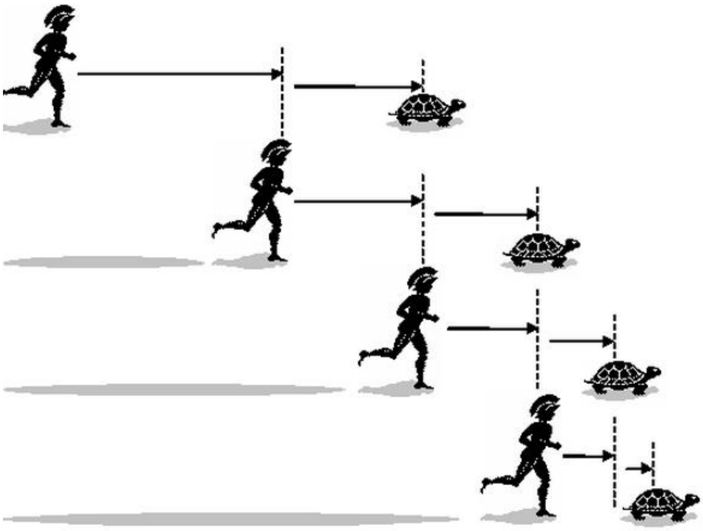
The concept of limit is one of the basic concepts of mathematical analysis. It can be said that analysis begins with the concept of limit. According to the 2018 General Education Program, the content of limits of numerical sequences and limits of functions is taught in grade 11. There is a certain psychological difficulty when forming the concept of limits for students and The same is true when teaching content about limits to students majoring in Mathematics Education in the Analysis 1 module. Therefore, the organization of teaching activities related to the content about limits of number sequences in the Analysis 1 module is an issue that requires attention and further research. In this article, I propose a process for organizing the teaching of Limits of Sequences in the Analysis 1 module, aligned with the Mathematics curriculum of the 2018 general education program.

1. Nội dung toán học và cách trình bày trong chương trình sách giáo khoa hiện hành về giới hạn của dãy số

1.1. Sơ lược lịch sử

Trong toán học, giới hạn của một dãy là giá trị mà các số hạng của dãy "tiến tới". Nếu một giới hạn tồn tại, dãy được gọi là hội tụ, nếu không, dãy được gọi là phân kì. Giới hạn của một dãy số là một khái niệm quan trọng trong giải tích. Giới hạn có thể được định nghĩa trong bất kỳ không gian metric hay tôpô nào, nhưng thường được sử dụng trước tiên với số thực.

Bài toán xuất phát của khái niệm giới hạn đã xuất hiện từ những năm trước Công nguyên. Gần 2.500 năm trước, triết gia lỗi lạc Zeno của Hy Lạp cổ đại viết một cuốn sách về các nghịch lý. Bản chất của nghịch lý là khó hiểu, nhưng may mắn thay, ta vẫn có "Achilles và con Rùa" thuộc hàng dễ hiểu nhất. Dưới đây là những yếu tố cơ bản mà Zeno nêu lên, dù đã được hàng thế hệ kể lại dưới nhiều dạng khác nhau nhưng vẫn còn lưu được giá trị thuở ban đầu. Người hùng nổi tiếng của Cuộc chiến thành Troia, Achilles (chúng ta vẫn biết tới anh và "gót chân A-sin" oan nghiệt) chạy đua với một con rùa thấp kém. Ngạo nghễ, Achilles cho phép rùa chạy trước. Chặng đua không có gì khó khăn với một chiến binh dũng mạnh và nhanh nhẹn, nhưng mọi chuyện không dễ dàng thế: để chạy vượt được con rùa, anh phải bắt kịp nó trước đã. Khi Achilles rút ngắn khoảng cách giữa mình và rùa, con vật chậm chạp lại tạo ra một khoảng cách mới. Dù khoảng cách mới nhỏ hơn khoảng cách giữa rùa và Achilles, Achilles phải chạy thêm cả khoảng cách mới để đuổi kịp được rùa.



Anh tiếp tục chạy, nhưng trong khoảng thời gian đó, con rùa lại tạo ra một khoảng cách nữa rồi, ép Achilles phải chạy nốt cả khoảng cách mới nhất để đuổi kịp. Đây là một vòng lặp vô tận, cho thấy Achilles chẳng bao giờ đuổi kịp được con rùa. Dù tốc độ chạy của Achilles có cao tới đâu, khoảng cách mới vẫn luôn xuất hiện; dù nhỏ hơn nhiều những lần trước, nhưng đây vẫn là khoảng cách cho phép con rùa luôn chạy trước Achilles. Vậy nghịch lý trên sai ở đâu nhỉ? Ngay cả Zeno cũng đã công nhận là Achilles chạy nhanh hơn rùa mà. Và chính Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) đã cho nhân loại câu trả lời, lại một lần nữa, bí mật của câu đố nằm tại sự kỳ diệu của toán học, cụ thể đó chính là chuỗi số hội tụ và phân kỳ.

Trước Cauchy đã có Archimedes (287-212, TCN) phát triển phương pháp vét cạn (method of exhaustion), dùng chuỗi vô hạn xấp xỉ để xác định một diện tích hay thể tích. Archimedes đã thành công trong việc tính tổng một dạng dãy số gọi là chuỗi hình học. Newton (1642-1726) sử dụng dãy số trong những công trình Giải tích dãy vô hạn (Analysis with infinite series, viết năm 1669, lưu hành qua bản viết tay, xuất bản năm 1711). Đến thế kỷ 18, các nhà toán học như Euler thành công trong việc tính tổng của một số chuỗi phân kỳ bằng cách dừng đúng lúc; họ không quan tâm liệu giới hạn có tồn tại hay không, miễn là nó tính được. Cuối thế kỷ 18, Lagrange trong Théorie des fonctions analytiques (1797) cho rằng sự thiếu tính chặt chẽ ngăn chặn sự phát triển của giải tích. Gauss trong quá trình nghiên cứu những dãy siêu hình học (1813) lần đầu tiên xem xét một cách chặt chẽ dưới những điều kiện nào thì một dãy số hội tụ đến một giới hạn.

Định nghĩa hiện đại của giới hạn (định nghĩa (ε, δ)) được đưa ra bởi Bernard Bolzano (Der binomische Lehrsatz, Prague năm 1816, ít được chú ý tại thời điểm đó) và Karl Weierstrass trong những năm 1870.

1.2. Nội dung toán học về giới hạn của dãy số

Lý thuyết giới hạn của dãy số ngày nay được đưa vào các cuốn Giải tích hiện đại đã sử dụng định nghĩa (ε, δ), và theo quan điểm được cho là bướng bỉnh của Cauchy thời bấy giờ, đó là toán học là một thế giới riêng với những suy luận chặt chẽ, đầy đủ và độc lập. Vì thế, các nội dung về giới hạn của dãy số được xây dựng một cách chặt chẽ và logic. Đầu tiên là định nghĩa dãy số (thực) là một hàm số giá trị thực với tập xác định là tập các số tự nhiên khác 0. Khái niệm giới hạn của dãy số sử dụng định nghĩa (ε, δ):

Cho dãy số thực $\{u_n\}$. Số $a \in R$ được gọi là giới hạn của dãy $\{u_n\}$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước bao giờ cũng tồn tại một số n_0 (phụ thuộc ε) sao cho với mọi $n > n_0$ ta đều có $|u_n - a| < \varepsilon$. Khi đó ta nói rằng dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến a hay tiến đến giới hạn a và ta viết $u_n \to a(n \to \infty)$ hay $lim_{n\to\infty} u_n = a$. Một dãy không có giới hạn được gọi là dãy phân kì.

Tiếp theo là các khái niệm về dãy bị chặn, dãy con và giới hạn riêng. Các tính chất của dãy hội tụ gồm có:

(1) Mọi dãy hội tụ đều có giới hạn duy nhất.

(2) Mọi dãy con của dãy hội tụ là dãy hội tụ và có cùng giới hạn của dãy.

(3) Nếu $\{u_n\}_n$ là dãy hội tụ và $\lim_{n\to\infty} u_n = a$ thì $\{|u_n|\}_n$ cũng là dãy hội tụ và $\lim_{n\to\infty} |u_n| = |a|$.

(4) Mọi dãy hội tụ là dãy bị chặn.

Sau đó trình bày các phép tính tổng hiệu, tích, thương các dãy hội tụ; định lý về tiến qua giới hạn trong bất đẳng thức và nguyên lý giới hạn kẹp giữa. Đồng thời cũng trình dày hai nguyên lý quan trọng của lý thuyết giới hạn là nguyên lý Cantor và Nguyên lý Bolzano – Weierstrass.

Một phần không thể thiếu trong lý thuyết về giới hạn của dãy số đó là dấu hiệu hội tụ của dãy số cho bởi Nguyên lý Cauchy mà ý nghĩa cơ bản của định lý này là ở chỗ để khảo sát sự hôi tụ của một dãy ta chỉ cần căn cứ vào quy luật biến thiên của bản thân dãy đó để xét xem tiêu chuẩn trên đây có được thỏa mãn hay không mà không cần biết trước giới hạn của dãy (nếu dựa vào định nghĩa ta cần biết trước giới hạn của dãy, việc này nhiều khi không dễ dàng). Hơn nữa ta cũng dùng định lý này để chứng minh sự phân kỳ của dãy.

Ngoài ra, trong hầu hết các giáo trình giải tích cũng đưa vào các kiến thức về giới hạn riêng, giới hạn trên và giới hạn dưới, giới hạn vô hạn (nếu $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ hoặc $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ thì theo định nghĩa $\{x_n\}_n$ là dãy phân kỳ).

1.3. Trình bày trong các bộ sách giáo khoa hiện hành về giới hạn của dãy số

Theo chương trình Giáo dục phổ thông 2018, giới hạn của dãy số được đưa vào lớp 11, trong hai chương: Chương II- Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân và Chương III- Giới hạn. Hàm số liên tục.

Trong chương II- Dãy số. Cấp số cộng. Cấp số nhân với các nội dung chủ yếu về khái niệm dãy số, dãy số tăng, dãy số giảm, dãy số bị chặn, giới thiệu 2 dãy số đặc biệt là cấp số cộng và cấp số nhân.

Chương III- Giới hạn. Hàm số liên tục có trình bày về giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm số và hàm số liên tục.

Có thể thấy khái niệm về dãy số được định nghĩa một cách cơ bản đúng như cách trình bày trong các giáo trình Giải tích 1, sau đó giới thiệu một số dãy số đặc biệt như cấp số cộng và cấp số nhân để học sinh có thể thấy được ứng dụng của các dãy số đặc biệt này trong thực tế, ngoài ra cũng để xây dựng một số giới hạn cơ bản sau này phục vụ cho việc tính giới hạn của dãy số theo quy tắc. Như chúng ta đã biết, phần lớn các nội dung toán học đều xây dựng một hệ thống các khái niệm và các quy tắc làm việc trên hệ thống các khái niệm đó. Trong các khái niệm, chúng ta lại phân loại thành khái niệm nguyên thủy không định nghĩa còn được gọi là khái niệm cơ bản. Trong các khái niệm có định nghĩa ở các cấp phổ thông lại có thể phân loại thành khái niệm đối tượng (tam giác, đường tròn, hình vuông, …), khái niệm quan hệ (hai đường thẳng song song, hai phương trình tương đương,…), khái niệm quy tắc (bội chung, ước chung, bội chung nhỏ nhất, ,…). Khái niệm giới hạn của dãy số cùng thuộc loại khái niệm quy tắc, đó là định nghĩa khái niệm chính là chỉ ra quy tắc tìm giá trị của giới hạn đó (nếu tồn tại). Vì thế, khái niệm giới hạn của dãy số trong các sách giáo khoa hiện hành được trình bày theo con đường quy nạp qua các ví dụ cụ thể rồi khái quát hóa, mô tả thuộc tính của dãy số để hình thành khái niệm: từ dãy số có giới hạn không, đến dãy số có giới hạn hữu hạn, sau đó là dãy số có giới hạn vô cực. Các quy tắc tính giới hạn của dãy số cũng được kiểm tra với các ví dụ cụ thể rồi tổng quát thành quy tắc mà bỏ qua các chứng minh để thực hiện việc giảm tải các kiến thức, kĩ năng hàn lâm không cần thiết đối với cấp Trung học phổ thông.

2. Tổ chức dạy học nội dung Giới hạn của hàm số trong học phần Giải tích 1 đối với sinh viên ngành Sư phạm Toán học

2.1. Tích hợp lịch sử về giới hạn

Đối với sinh viên ngành Sư phạm Toán học thì trước khi học Toán cần phải yêu thích và say mê môn Toán thật nhiều. Có những sinh viên, việc học toán và giải toán như một nhu cầu thiết yếu, tuy nhiên bên cạnh đó có biết bao nhiêu bạn sinh viên học Sư phạm Toán chỉ vì do bố mẹ đã định hướng, đã chọn nghề giúp. Do đó, việc đưa học phần Lịch sử Toán học thành học phần bắt buộc và được dạy ngay học kì 2 của năm thứ nhất như một yêu cầu tất yếu của chương trình. Tuy vậy, ta có thể thấy lịch sử toán học cũng nên được mỗi giảng viên tích hợp vào từng học phần, vào từng bài giảng một cách phù hợp để kích thích nhu cầu tìm hiểu về môn Toán hơn nữa đối với sinh viên, để họ từng bước biến việc học thụ động sang học toán, tìm hiểu thêm về toán một cách chủ động hơn nữa.

Đối với nội dung giới hạn của dãy số cũng vậy, chỉ nguyên nghịch lý Zeno thôi cũng đã có rất nhiều câu chuyện xoay quanh nó. Rõ ràng là ở cấp Trung học cơ sở (THCS), học sinh đã từng giải toán chuyển động trong đó có những bài toán về hai chuyển động cùng chiều mà vật chuyển động sau có vận tốc nhanh hơn sẽ đuổi kịp vật chuyển động trước đó. Vậy thì đối với học sinh lớp 11, các em có thể chắc chắn đó là một nghịch lý, một ngụy biện, nhưng sai lầm trong lập luận đó là do đâu? Nếu như trước đây, sinh viên đã từng được chỉ ra sai lầm thì họ có cảm thấy thỏa mãn về câu trả lời hay không? Và việc tự mình tìm các câu chuyện xoay quanh nghịch lý Zeno thôi cũng chỉ dẫn đến bao nhiêu câu chuyện lịch sử toán học thú vị khác nữa.

2.2. Thực hiện đối chiếu và so sánh khi dạy học các khái niệm trong nội dung về giới hạn

Như đã trình bày ở trên, khái niệm dãy số được đưa vào chương trình sách khoa phổ thông mới theo đúng quan điểm hàm của nội dung toán học về dãy số. Ta có thể so sánh cách định nghĩa của giáo trình giảng dạy ở đại học: *Cho tập hợp số nguyên dương* $N^* = \{1,2,3,\dots\}$. *Một ánh xạ u:* $N^* \to R$ *được gọi là một dãy số thực. Nếu đặt* $u_n = u(n)$ *thì ta có thể biểu diễn dãy số thực đó dưới dạng* $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ *Ta kí hiệu dãy đó bằng* $\{u_n\}$. *Phần tử* u_n *được gọi là số hạng tổng quát của dãy.*

Và trong sách giáo khoa Toán 11 (bộ Cánh Diều):

- Mỗi hàm số $u: \{1; 2; 3; \dots; m\} \to \mathbb{R}(m \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là một dãy số hữu hạn. Do mỗi số nguyên dương $k(1 \le k \le m)$ tương ứng với đúng một số u_k nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_m$. Số u_1 gọi là số hạng đầu, số u_m gọi là số hạng cuối của dãy số đó.

- Mỗi hàm số $u: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ được gọi là một dãy số vô hạn. Do mỗi số nguyên dương n tương ứng với đúng một số u_n nên ta có thể viết dãy số đó dưới dạng khai triển: $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$. Dãy số đó còn được viết tắt là (u_n). Số u_1 gọi là số hạng thú nhất (hay số hạng đầu), số u_2 gọi là số hạng thú hai, ..., số u_n gọi là số hạng thú n và là số hạng tổng quát của dãy số đó.

2.3. Thực hiện đối chiếu và so sánh khi dạy học các định lí về giới hạn

Đối với học sinh THPT, mục tiêu chính là giúp họ nắm vững các khái niệm và kỹ năng cơ bản về giới hạn, trong khi đối với sinh viên Đại học Sư phạm Toán, mục tiêu là đi sâu vào lý thuyết và phát triển khả năng phân tích, chứng minh và ứng dụng các định lý vào những vấn đề phức tạp hơn. Phương pháp giảng dạy cũng cần phải điều chỉnh để phù hợp với từng đối tượng, đảm bảo hiệu quả học tập cao nhất.

Đối chiếu cụ thể một số định lý

Định lý về giới hạn của tổng, hiệu, tích, thương:

- Toán THPT: Các định lý này thường được giới thiệu thông qua các ví dụ đơn giản và trực quan. Học sinh học cách áp dụng trực tiếp các định lý để giải các bài toán cụ thể.

- Giải tích 1: Các định lý này không chỉ được chứng minh một cách chi tiết mà còn được mở rộng cho các tình huống phức tạp hơn. Sinh viên học cách sử dụng các định lý này trong các chứng minh toán học lớn hơn và trong các tình huống trừu tượng hơn.

Định lý Bolzano-Weierstrass:

- Toán THPT: Thường không được đề cập đến do tính phức tạp của định lý.

- Giải tích 1: Là một định lý cơ bản trong phân tích toán học, được chứng minh chi tiết và áp dụng trong nhiều bài toán và lý thuyết khác nhau.

Định lý Heine-Borel:

- Toán THPT: Thường không nằm trong chương trình giảng dạy.

- Giải tích 1: Là một phần quan trọng của chương trình giảng dạy, đặc biệt trong các khóa học về giải tích thực và giải tích hàm.

Kết luận

Lý thuyết giới hạn là một phần không thể thiếu của toán học hiện đại, với một lịch sử phát triển lâu dài và phong phú, từ những nghịch lý cổ đại đến những lý thuyết trừu tượng của thế kỷ 20 và tiếp tục đến ngày nay. Nó là nền tảng cho nhiều khái niệm và ứng dụng trong toán học cũng như các lĩnh vực khoa học khác.

Việc giảng dạy các định lý về giới hạn ở cấp THPT và Toán cao cấp có sự khác biệt rõ ràng về mức độ phức tạp, phương pháp tiếp cận, và mục tiêu giảng dạy. Trong khi chương trình THPT tập trung vào việc xây dựng nền tảng và ứng dụng thực tiễn, thì chương trình Toán cao cấp hướng tới phát triển hiểu biết sâu sắc và kỹ năng lý luận toán học. Hiểu được sự khác biệt này sẽ giúp giáo viên tổ chức giảng dạy hiệu quả và phù hợp với trình độ và mục tiêu của học sinh ở mỗi cấp độ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Cung Thế Anh, Đặng Hùng Thắng, Trần Văn Tấn,…, (2023), Toán 11, Tập 1, Kết nối tri thức với cuộc sống, NXB GD Việt Nam.

[2]. Cung Thế Anh, Đặng Hùng Thắng, Trần Văn Tấn,…, (2023), Bài tập Toán 11, Tập 1, Kết nối tri thức với cuộc sống, NXB GD Việt Nam.

[3]. Nguyễn Văn Khuê (2002), *Giải tích toán học (Tập 1),* NXB ĐHSP.

[4]. Nguyễn Xuân Liêm, (1998), *Giải tích*, NXB GD.

[5]. Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, Hoàng Quốc Toàn, (2000),*Giáo trình Giải tích (Tập 1),* NXB ĐHQGHN.

[6]. Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, Hoàng Quốc Toàn, (2001), *Bài Tập Giải tích (Tập 1),* NXB ĐHQG HN.

[7]. Đỗ Đức Thái, (2023), Toán 11, Tập 1, Cánh Diều, NXB Đại học Sư phạm.

[8]. Đỗ Đức Thái, (2023), Bài tập Toán 11, Tập 1, Cánh Diều, NXB Đại học Sư phạm.

[9]. Vũ Tuấn, (2011),*Giáo trình giải tích toán học (Tập 1),* NXB GD.

OPTIMAL GUARANTEED COST CONTROL OF 2D SYSTEMS

TS. Nguyễn Thị Lan Hương [1]

[1] Khoa Toán Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Abstract The problem of guaranteed cost control in this paper for a class of two-dimensional (2D) systems described by the Roesser model with mutiplicative stochastic noises. A convex optimization problem with linear matrix inequality constraints is formulated to show the guaranteed cost controller which minimizes the guaranteed cost of the closed-loop uncertain systems.

Keywords: *stochastic 2D systems, Roesser model, uncertain systems, guaranteed cost control.*

1. Introduction

Various dynamical systems control engineering are determined by the information propagation which occurs in each of the two independent directions. Such models are typically described by (2D) systems. For instance, 2D systems have found various applications in areas such as iterative learning control, gas absorption, thermal processes, digital filtering [1,2,3]. Thus, due to a wide ranging of applications, theory of 2D systems has received significant research attention in the recent years.

In addition, exogenous disturbances are also unavoidably encountered in engineering systems because of the inaccuracy of data processing, measurement errors or linear approximations [4, 5]. Various results concerning the

Contact Nguyen Thi Lan Huong, e-mail address: ntlhuong@hnue.edu.vn

analysis and control of dynamical systems involving certain types of additive stochastic noises have been reported recently [6]. However, the aforementioned works are not applicable to multiplicative stochastic noisy systems (MSNSs) due to the nature of the model themselves. Multiplicative noises exist in many practical models such as medical ultrasound, synthetic aperture radar and tomography images [7]. Technically, in MSNSs, stochastic signals get multiplied into relevant system states. This makes the analysis and design of MSNSs more complicated and challenging.

Moreover, the guaranteed cost control technique for 2D uncertain systems aims to design a controller such that the closed-loop system is asymptotically almost sure stable and the closed-loop cost function value is not more than a specified upper bound for all admissible uncertainties. Such researches for 2D MSNSs have received very little research attention and existing results concerning stability analysis and synthesis guaranteed cost control of 2D systems are quite scarce. Recently, a few results have been obtained for the guaranteed cost control of 2D discrete uncertain systems. Optimal guaranteed cost control problem for 2-D discrete uncertain systems is an important problem [8]. However, to the best of the author's knowledge, the optimal guaranteed cost control problem for 2-D discrete uncertain systems represented by the Roesser model with multiplicative stochastic noises. This paper, therefore, addresses the optimal guaranteed cost control problem for 2D discrete uncertain systems described by the Roesser model with norm bounded uncertainties.

2. Model description

We consider the uncertain 2D discrete-time linear systems described by the Roesser model

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = (A + \Delta A_{ij})x(i,j) + (B + \Delta B_{ij})u(i,j)$$

where $x(i,j) = \begin{bmatrix} x^h(i,j) \\ x^v(i,j) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, A, \hat{A}_s \in \mathbb{R}^{n\times n}; B, \hat{B}_s \in \mathbb{R}^{n\times m}, s = \overline{1,d}$

are known constant matrices. The matrices $\Delta A_{ij}, \Delta B_{ij}, \Delta\hat{A}_s, \Delta\hat{B}_s, s = \overline{1,d}$ represent parameter uncertainties satisfying the following conditions

$$[\Delta A_{ij} \quad \Delta B_{ij}] = LF_{ij}[M \quad N],$$
$$[\Delta\hat{A}_s \quad \Delta\hat{B}_s] = LF_{ij}[\hat{M}_s \quad \hat{N}_s], s = \overline{1,d}$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times p}, M, \hat{M}_s \in \mathbb{R}^{q\times n}; N, \hat{N}_s \in \mathbb{R}^{q\times m}, s = \overline{1,d}$ are known matrices of uncertainty and $F_{ij} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ is an unknown matrix representing parameter uncertainty satisfying $F_{ij}^T F_{ij} \leqslant I$. Moreover, $\beta_{ij} = \mathrm{col}\{\beta_{ij}^1, \dots, \beta_{ij}^d\}, \beta_{ij}^s(s = \overline{1,d})$ are scalar valued white noises on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, which are independent variables with zero-mean and satisfy

$$\mathbb{E}\beta_{ij}^k\beta_{ij}^l = \delta_{kl}\ k,l = 1,2\dots,d \tag{2}$$

We define the following infinite-horizon quadratic cost function associated with system (7) as a form:

$$J = \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x^T(i,j)Qx(i,j) + u^T(i,j)Ru(i,j)\right) \tag{3}$$

where $Q \in \mathbb{S}_n^+, R \in \mathbb{S}_m^+$ are given matrices representing weights of the cost function, $x(i,j) = [x^{hT}(i,j) \quad x^{vT}(i,j)]^T$ denotes the state vector.

In addition, without loss of generality, we can assume that initial conditions of system (1) are arbitrary but belong to the set

$$\{x^h(0,i) = X_h F_1, x^v(i,0) = X_v F_2, F_k^T F_k \leqslant 1, k = 1,2\} \tag{4}$$

where X_h, X_v are given matrices and F_1, F_2 are unknown vectors.

3. Problem formulation and Preliminaries

Definition 3.1. System (1) with initial condition (4) is said to be asymptotically almost sure stable if

$$\mathbb{P}\left\{\lim_{i+j\to\infty} \| x(i,j) \| = 0\right\} = 1$$

Definition 3.2. System (1) with initial condition (4) is said to be guaranteed cost stabilizable if there exist a controll law $u^*(i,j)$ and a positive scalar J^* such that the closed-loop system (1) is asymptotically almost sure stable and the cost function (3) satisfies $J \leqslant J^*$, for all admissible uncertainties. J^* is said to be a guaranteed cost value and $u^*(i,j)$ is a guaranteed cost control law for the system (1).

Lemma 3.1. Let $G \in \mathbb{R}^{m\times n}, L \in \mathbb{R}^{m\times p}, E \in \mathbb{R}^{q\times n}$ and $Q = Q^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Assume that there exit a positive definite matrix P and a scalar $\varepsilon > 0$ such that

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} + \varepsilon LL^T & G \\ G^T & \varepsilon^{-1}E^TE + Q \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

Then

$$(G + LFE)^T P(G + LFE) + Q < 0 \tag{6}$$

for all F satisfying $F^T F < I$.

4. Main results

4.1 Stability analysis of 2D uncertain stochatic systems

We design a static-state feedback control law $u(i,j) = Kx(i,j)$ such that the closed-loop system of (1) is given as

$$\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} = A_{ij}^c x(i,j) + \sum_{s=1}^{d} \hat{A}_{ij}^{cs} x(i,j)\beta_{ij}^s \tag{7}$$

where $A_{ij}^c = A + \Delta A_{ij} + (B + \Delta B_{ij})K, \hat{A}_{ij}^{cs} = \hat{A}_s + \Delta\hat{A}_s + (\hat{B}_s + \Delta\hat{B}_s)K, s = \overline{1,d}$ is asymptotically almost sure stable and for all admissible uncertainties, the cost function (3) satisfies $J \leqslant J^*$, where J^* is some specified constant.

Theorem 4.1. Assume that there exists a matrix $P = \text{diag}(P_h, P_v) \in \mathbb{S}_n^+$ satisfying the following conditions

$$\mu_{ij} := (A_{ij}^c)^T P A_{ij}^c + \sum_{s=1}^{d} (\hat{A}_{ij}^{cs})^T P(\hat{A}_{ij}^s) - P + Q + K^T R K < 0 \tag{8}$$

then the closed-loop system (7) is asymptotically stable under controller $u(i,j) = Kx(i,j)$ and $J \leqslant J^*$, with $J^* = T_1\lambda_{\max}(X_h^T P_h X_h) + T_2\lambda_{\max}(X_v^T P_v X_v)$.

Proof. Consider the following 2D-Lyapunov functional

$$V(x(i,j)) = x^{hT}(i,j)P_h x^h(i,j) + x^{vT}(i,j)P_v x^v(i,j) \tag{9}$$

Denote

$$l(x(i,j), u(i,j)) = x^T(i,j)Qx(i,j) + u^T(i,j)Ru(i,j)$$

and

$$\begin{aligned}\Delta V(i,j) &= \mathbb{E}\big(V^1(x^h(i+1,j)) + V^2(x^v(i,j+1)) \mid \mathcal{F}_{i+j}\big) - V(x(i,j)) \\ &= \mathbb{E}\left(\begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix}^T \text{diag}(P_h, P_v) \begin{bmatrix} x^h(i+1,j) \\ x^v(i,j+1) \end{bmatrix} \middle| \mathcal{F}_{i+j}\right) - V(x(i,j)) \\ &= \mathbb{E}\left((A_{ij}^c x(i,j) + \sum_{s=1}^{d} \hat{A}_{ij}^{cs} x(i,j)\beta_{ij}^s)^T P(A_{ij}^c x(i,j)\right.\end{aligned}$$

where $\mathcal{F}_{i+j}$ is the σ-algebra generated by $\{\beta_{kl} : (k,l) \in \Omega_{i+j-1}\}$ and, for each positive integer $\kappa, \Omega_\kappa = \{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2 : k + l \leq \kappa\}$, that is,

$$\mathcal{F}_{i+j} = \sigma\{\beta_{kl} : k + l \leq i + j - 1, (k,l) \in \mathbb{N}_0^2\},\ (i,j) \in \mathbb{N}_0^2$$

and $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, where $\emptyset$ denotes the empty set and Ω is the the sample space. Obviously, $\mathcal{F}_{k-1} \subset \mathcal{F}_k$ for any $k \in \mathbb{N}$. Recall that β_{ij} is a double sequence of $\mathbb{R}^d$-valued random variables defined on a complete probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Without loss of generality, we assume $\mathcal{F} = \sigma\{\cup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_k\}$. It is easy to see that the state trajectory $x(i,j)$ of system (7) is $\mathcal{F}_{i+j}$-adapted.

By the properties of $\mathbb{R}^d$-valued random variable β_{ij} and applying Lemma ?? we obtain from (10) that

$$\Delta V(i,j) = x^T(i,j)\left(\left(A_{ij}^c\right)^T P A_{ij}^c + \sum_{s=1}^{d} \left(\hat{A}_{ij}^{cs}\right)^T P \hat{A}_{ij}^{cs} - P\right)x(i,j) \tag{11}$$

Therefore,

$$\Delta V(i,j) + l(x(i,j), u(i,j)) = \Delta V(i,j) + x^T(i,j)(Q + K^T RK)x(i,j)$$
$$= x^T(i,j)\mu_{ij}x(i,j)$$

Under condition (8), we have

$$\Delta V(i,j) + l(x(i,j), u(i,j)) < 0 \tag{12}$$

which implies

$$\Delta V(i,j) \leqslant -\lambda_{\min}(Q + K^T RK) \parallel x(i,j) \parallel^2$$

Utilizing Theorem 1 in [11] we obtain

$$\lim_{i+j\to\infty} W(i,j) = 0 \text{ a.s}$$

So

$$\lim_{i+j\to\infty} \parallel x(i,j) \parallel = 0 \text{ a.s.}$$

Hence, the closed-loop system (7) is asymptotically stable.

Moreover, by summing up both sides of (12) for any positive integers r_1, r_2, we get

$$\sum_{i=0}^{r_1}\sum_{j=0}^{r_2} \{\mathbb{E}\left(V^1(x^h(i,j)) + V^2(x^v(i,j)) \mid \mathcal{F}_{i+j}\right) - V(x(i,j)) \tag{13}$$

$$+x^T(i,j)(Q + K^T RK)x(i,j)\} < 0 \tag{13}$$

Taking expectation both sides of (13), we obtain

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{r_1}\sum_{j=0}^{r_2} x^T(i,j)(Q + K^T RK)x(i,j)\right) \leqslant \sum_{i=0}^{r_1} \mathbb{E}\left(V^2(x^v(i,0))\right)$$

Let $r_1 \to \infty, r_2 \to \infty$, it follows from (14) that

$$J \leqslant T_1\lambda_{\max}(X_h^T P_h X_h) + T_2\lambda_{\max}(X_v^T P_v X_v)$$

Remark 4.1. Note that LMI (8) can be rewritten as

$$\left(A + BK + LF_{ij}(M + NK)\right)^T P\left(A + BK + LF_{ij}(M + NK)\right)$$
$$+\sum_{s=1}^{d} \left(\hat{A}_s + \hat{B}_s K + LF_{ij}(\hat{M}_s + \hat{N}_s K)\right)^T P \left(\hat{A}_s + \hat{B}_s K + LF_{ij}(\hat{M}_s + \hat{N}_s K)\right)$$

We denote

$$\mathcal{A} = \mathrm{col}\{A + BK, \hat{A}_1 + \hat{B}_1 K, \dots, \hat{A}_d + \hat{B}_d K\},\ \mathcal{L} = \underbrace{\mathrm{diag}\{L, \dots, L\}}_{d+1 \text{ blocks}},$$

$$\mathcal{F}_{ij} = \underbrace{\mathrm{diag}\{F_{ij}, \dots F_{ij}\}}_{d+1 \text{ blocks}},\ \mathcal{P} = \mathrm{diag}\,\underbrace{\{P, \dots, P\}}_{d+1 \text{ blocks}},$$

$$\mathcal{M} = \mathrm{col}\{M + NK, \hat{M}_1 + \hat{N}_1 K, \dots, \hat{M}_d + \hat{N}_d K\}.$$

It follows from (8) that

$$(\mathcal{A} + \mathcal{L}\mathcal{F}_{ij}\mathcal{M})^T \mathcal{P} (\mathcal{A} + \mathcal{L}\mathcal{F}_{ij}\mathcal{M}) - P + Q + K^T R K < 0 \qquad (16)$$

Applying Lemma 3.1, condition (16) holds if the following one does

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{P}^{-1} + \varepsilon \mathcal{L}\mathcal{L}^T & \mathcal{A} \\ \mathcal{A}^T & \varepsilon^{-1}\mathcal{M}^T\mathcal{M} - P + Q + K^T R K \end{bmatrix} < 0 \qquad (17)$$

Therefore, assume that condition (17), which does not depend on i, j, holds then system (7) is guaranteed cost stabilizable.

4.2 Controller design

Let us denote the following block matrices

$$\bar{M} = Y M^T + U^T N^T; \bar{B}_s = A_s Y + B_s U; \bar{N}_s = Y \hat{M}_s^T + U^T \hat{N}_s^T, s = \overline{1, d}$$

$$\Lambda = \mathrm{diag}\{-Y + \epsilon L L^T, \dots, -Y + \epsilon L L^T\};\ \mathcal{T} = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \vdots \\ \bar{B}_d \end{bmatrix};$$

$$\mathcal{Y}_1 = \begin{bmatrix} Q^{\frac{T}{2}} Y \\ R^{\frac{T}{2}} U \end{bmatrix};\ \mathcal{Y}_2 = \begin{bmatrix} \bar{M}^T \\ \bar{N}_1^T \\ \vdots \\ \bar{N}_d^T \end{bmatrix};\ \mathcal{H}_1 = \begin{bmatrix} Y Q^{\frac{1}{2}} & U^T R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_2 = [\bar{M} \quad \bar{N}_1 \quad \dots \quad \bar{N}_d];\ \mathcal{U} = [\bar{A}^T \quad \dots \quad \bar{B}_d^T];\ \bar{A} = AY + BU$$

Theorem 4.2. Consider system (1) with initial conditions (4) and cost function (3), system (1) is guaranteed cost stabilizable if there exist a positive scalar ε, a matrix $Y = \mathrm{diag}\{Y_h, Y_v\} \in \mathbb{S}_n^+$ and a $m \times n$ matrix U such that the following LMI is feasible

$$\begin{bmatrix} \Lambda & \mathcal{T} & 0 & 0 \\ \mathcal{U} & -Y & \mathcal{H}_1 & \mathcal{H}_2 \\ 0 & \mathcal{Y}_1 & -I & 0 \\ 0 & \mathcal{Y}_2 & 0 & -\epsilon I \end{bmatrix} < 0 \qquad (18)$$

A control law is given by $K = U Y^{-1}$.

Moreover, a guaranteed cost value is given by

$$J^* = T_1 \lambda_{\max}(X_h^T Y_h^{-1} X_h) + T_2 \lambda_{\max}(X_v^T Y_v^{-1} X_v) \qquad (19)$$

Proof. The condition (17) can be rewritten as

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} + \varepsilon L L^T & \cdots & 0 & A + BK \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -P^{-1} + \varepsilon L L^T & \hat{A}_d + \hat{B}_d K \\ (A + BK)^T & \cdots & (\hat{A}_d + \hat{B}_d K)^T & -P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1}\mathcal{M}^T\mathcal{M} + Q + K^T R K \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

By premultiplying and postmultiplying LMI (20) by the matrix $\mathrm{diag}\{\underbrace{I_n, \dots, I_n}_{d+1 \text{ times}}, P^{-1}\}$, we have

$$\begin{bmatrix} -Y+\varepsilon LL^T & \cdots & 0 & (A+BK)Y \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & -Y+\varepsilon LL^T & (\hat{A}_d+\hat{B}_dK)Y \\ Y(A+BK)^T & \cdots & Y(\hat{A}_d+\hat{B}_dK)^T & -Y^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{V} \end{bmatrix} < 0$$

where $Y = P^{-1}, \mathcal{V} = \varepsilon^{-1}Y(M+NK)^T(M+NK)Y + \sum_{s=1}^{d} \varepsilon^{-1}Y(\hat{M}_s + \hat{N}_sK)^T(\hat{M}_s+\hat{N}_sK)Y + YQY + YK^TRKY$. Applying Schur complement and by (4.2), we get LMI (18). Moreover, from Theorem 4.1, it is trivial to show (19).

Proposition 4.1. Consider system (1) with initial conditions (4) and cost function (3), if the following optimization problem

$$\text{minimize } T_1\alpha + T_2\beta \tag{21}$$

$$\text{subject to } \begin{cases} (i).\ (18), \\ (ii).\begin{bmatrix} -\alpha I_{n_1} & X_h^T \\ X_h & -Y_h \end{bmatrix} < 0 \\ (iii).\begin{bmatrix} -\beta I_{n_2} & X_v^T \\ X_v & -Y_v \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \tag{22}$$

has a feasible solution $\alpha > 0, \beta > 0, 0 < Y = \mathrm{diag}\{Y_h, Y_v\} \in \mathbb{R}^{n\times n}, U \in \mathbb{R}^{m\times n}$, then the control law defined by $u(i,j) = Kx(i,j)$ are the suboptimal guaranteed cost control law, where $K = UY^{-1}$.

Proof. By Theorem 4.2, the control law $K = UY^{-1}$ which is constructed in terms of any feasible solution ε, U and Y is a guaranteed cost controller of system (1). To obtain the optimum value of upper bound of guaranteed cost, the term $\lambda_{\max}(X_h^TY_h^{-1}X_h)$ is changed to $\lambda_{\max}(X_h^TY_h^{-1}X_h) < \alpha \Leftrightarrow X_h^TY_h^{-1}X_h < \alpha I_{n_1}$ and the term $\lambda_{\max}(X_v^TY_v^{-1}X_v)$ is changed to $\lambda_{\max}(X_v^TY_v^{-1}X_v) < \beta \Leftrightarrow X_v^TY_v^{-1}X_v < \beta I_{n_2}$. Applying Schur complement, we have conditions (ii) and (iii). Therefore, the minimization of $T_1\alpha + T_2\beta$ implies the minimization of upper bound of guaranteed cost J in (19).

5. Conclusions

A solution to the suboptimal guaranteed cost control problem for the uncertain 2D discrete Roesser with multiplicative stochastic noises has been presented. The sufficient condition for the existence of a guaranteed cost controller. A convex optimization problem has been formulated to select the optimal guaranteed cost controller which minimizes the upper bound on the closed-loop cost function.

REFERENCES

[1] C.K. Ahn, 2014. Overflow oscillation elimination of 2-D digital filters in the Roesser model with Wiener process noise, IEEE Signal Process. Lett., 21(10), pp. 1302-1305.

[2] C.K. Ahn and H. Kar, 2015. Expected power bound for two-dimensional digital filters in the Fornasini-Marchesini local state-space model, IEEE Signal Process. Lett., 22(8), pp. 1065-1069.

[3] C.K. Ahn, L. Wu and P. Shi, 2016. Stochastic stability analysis for 2-D Roesser systems with multiplicative noise, Automatica, 69, pp. 356-363.

[4] W.S. Lu, 1992. Two-Dimensional Digital Filters, Marcel-Dekker, New York.

[5] Z. Mao, Y. Zhan, G. Tao, B. Jiang and X.G. Yan, 2017. Sensor fault detection for rail vehicle suspension systems with disturbances and stochastic noises, IEEE Vehic. Technol., 66, pp. 4691-4705.

[6] L.Q. Wang, X. Chen and J. Shen, 2019. Positive filtering for positive 2D fuzzy systems under ℓ_1 performance, IET Control Theory Appl.,13 (7), pp. 1024-1030.

[7] M. Petrou and C. Petrou, 2002. Image Processing: The Fundamentals, John Wiley & Sons, Chichester, UK.

[8] X. Guan, C. Long, G. Duan, 2001. Robust optimal guaranteed cost control for 2-D discrete systems, IEE Control Theory Appl. 148, 355361 .

[9] A. Gut, 2005. Probability: A Graduate Course. New York, NY, USA: Springer-Verlag.

[10] N.T.Lan-Huong and L.V.Hien, 2020. Robust stability of nonlinear stochastic 2-D systems: LaSalle-type theorem approach, International Journal of Robust and Nonlinear Control, 30 (13), pp. 4839-4862.

TRUNCATED SHARING OF SUBSETS AND UNIQUENESS OF L-FUNCTIONS IN THE EXTENDED SELBERG CLASS*

GS.TSKH. Hà Huy Khoái [1], TS. Vũ Hoài An [2], TS. Phạm Ngọc Hoa [3]

[1] Viện Toán và NCKH ứng dụng, Đại học Thăng Long

[2] Trường Đại học Hải Dương

[3] Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Dương

Abstract

Let $P(z)$ be a polynomial of degree q without multiple zeros, let S be the zero set of $P(z)$, and let k be the number of distinct roots of the derivative of P. Assume that $P(z)$ is a strong uniqueness polynomial for L-functions in the Selberg class. We prove that two L-functions L_1 and L_2 in the Selberg class sharing S with multiplicity $\leq m$ (i. e. $E_{L_1,m)}(S) = E_{L_2,m)}(S)$) necessarily coincide if one of the following conditions holds: (i) $m = 1$ and $q \geq 2k+5$; (ii) $2 \leq m < \infty$ and $q \geq 2k+3$.

DOI: 10.1134/ S0001434623010224

Keywords: *L-function, Selberg class, meromorphic function, truncated sharing.*

1. Introduction. Main results

An L-function in the Selberg class $\mathcal{S}$ is defined to be a Dirichlet series

$$L(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

satisfying the following axioms:

(i) Ramanujan hypothesis: $a(n) \ll n^{\epsilon}$ for all positive ϵ.

(ii) Analytic continuation: there exists a nonnegative integer m such that $(s-1)^m L(s)$ is an entire function of finite order.

(iii) Functional equation: there exist positive real numbers Q and λ_i, a positive integer K, and complex numbers μ_i and ω with $\Re\mu_i \geq 0$ and $|\omega| = 1$ such that $\Lambda_L(s) = \omega\overline{\Lambda_L(1-\bar{s})}$, where $\Lambda_L(s) := L(s) Q^s \prod_{i=1}^{K} \Gamma(\lambda_i s + \mu_i)$.

(iv) Euler product hypothesis: $L(s)$ satisfies $L(s) = \prod_p L_p(s)$, where

$$L_p(s) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(p^k)}{p^{ks}}\right)$$

with coefficients $b(p^k)$ satisfying $b(p^k) \ll p^{k\theta}$ for some $\theta < 1/2$, where the product is taken over all prime numbers p.

Note that the Riemann zeta function is an example of a function in the Selberg class.

In recent years, the problem of determining an L-function in the Selberg class from its preimages of subsets has received increasing attention.

On the other hand, an L-function can be analytically continued as a meromorphic function in the complex plane $\mathbb{C}$. Therefore, for the problem of determining an L-function by its preimages of subsets, one of the main tools is the Nevanlinna theory on the value distribution of meromorphic functions. First, let us recall some basic notions.

Let f be a meromorphic function in $\mathbb{C}$, and let $a \in \mathbb{C} \cup \infty$. Denote the set of a-points of f by $E_f(a)$ (when the points are counted with multiplicities) and by $\bar{E}_f(a)$ if each a-point is counted only one time (i.e., $\bar{E}_f(a)$ is the preimage of a under f).

For a nonempty subset $S \subset \mathbb{C} \cup \infty$, define

$E_f(S) = \cup_{a \in S} E_f(a),\ \bar{E}_f(S) = \cup_{a \in S} \bar{E}_f(a)$

Two meromorphic functions f and g are said to share S counting multiplicities (share SCM) if $E_f(S) = E_g(S)$, and share S ignoring multiplicities (share S IM) if $\bar{E}_f(S) = \bar{E}_g(S)$.

Now let m be a positive integer or ∞.

Denote by $E_{f,m)}(a)$ (respectively, $E_{f,(m}(a)$) the set of a-points of f with multiplicities $\leq m$ (respectively, $\geq m$), each a-point counted as many times as its multiplicity. For example, $E_{f,1)}(a)$ is the set of simple zeros of the function $(f - a)$. The counting function of a-points of f with multiplicities $\leq m$ (respectively, $\geq m$) is denoted by $N_{m)}(r, 1/(f - a))$ (respectively, $N_{(m}(r, 1/(f - a))$).

If C is some condition, then we denote by $N(r, 1/(f - a); C)$ the counting function of a-points of f (counted with multiplicities) at which f satisfies condition C.

It should be noted that

$E_{f,\infty)}(a) = E_f(a), E_{f,1)}(a) \subset \bar{E}_f(a), N_{\infty)}(r, 1/(f - a)) = N(r, 1/(f - a)),$

and $N_{1)}(r, 1/(f - a)) \leq \bar{N}(r, 1/(f - a))$.

For a subset $S \subset \mathbb{C} \cup \infty$, define

$E_{f,m)}(S) = \cup_{a \in S} E_{f,m)}(S),\ E_{f,(m}(S) = \cup_{a \in S} E_{f,(m}(S)$

In the last few years, the value distribution and uniqueness of L-functions has been studied extensively. J. Steuding [1] showed that an L-function is uniquely defined by the preimage of a single point $c \in \mathbb{C}$ counted with multiplicity:

Theorem 1. If two L-functions with $a(1) = 1$ share a complex value $c \neq \infty CM$, then they are identically equal.

P. C. Hu and B. Q. Li [2] pointed out that one should add the condition $c \neq 1$.

In 2004, J. Steuding [3] (Theorem 4) showed that two L-functions satisfying some additional conditions coincide if they share two values IM. In 2011, B. Q. Li [4] was able to remove these conditions.

Theorem 2. Let L_1 and L_2 be two L-functions satisfying the same functional equation with $a(1) = 1$, and let $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ be two distinct values. If $L_1^{-1}(a_j) = L_2^{-1}(a_j), j = 1,2$, then $L_1 \equiv L_2$.

Note that the above-mentioned results are concerned with L-functions sharing single points. In 2015, P. C. Hu and A. D. Wu [5] obtained uniqueness theorems for L-functions sharing a finite subset of $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ counted with multiplicities.

Theorem 3. Fix a positive integer n and take a subset $S=\{c_1,\cdots,c_n\}\subset\mathbb{C}\setminus\{1\}$ of distinct complex numbers satisfying

$$n+(n-1)\sigma_1(c_1,\cdots,c_n)+\cdots+2\sigma_{n-2}(c_1,\cdots,c_n)+\sigma_{n-1}(c_1,\cdots,c_n)\neq 0$$

where the σ_j are the elementary symmetric polynomials

$$\sigma_j(c_1,\cdots,c_n)=(-1)^j\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_j\le n} c_{i_1}c_{i_2}\cdots c_{i_j}, j=1,\cdots,n-1$$

If two L-functions with $a(1)=1$ share SCM, then they are identically equal.

From now on in this paper, an L-function always means an L-function in the Selberg class with the normalization condition $a(1)=1$. It was proved in [6] that if S is the zero set of a polynomial P without multiple zeros satisfying the condition $P(1)P'(1)\neq 0$, then S is a unique range set for L-functions; i.e., the condition $E_{L_1}(S)=E_{L_2}(S)$ implies $L_1=L_2$ for L-functions L_1 and L_2. Further, a condition to be satisfied by a subset S such that $L_1^{-1}(S)=L_2^{-1}(S)$ implies $L_1\equiv L_2$ was also established there.

In the present paper, we study the problem of sharing with truncated multiplicity. Namely, for a positive integer $m\ge 1$ we find subsets S such that the condition

$$E_{L_1,m)}(S)=E_{L_2,m)}(S)$$

implies $L_1=L_2$ for two nonconstant L-functions L_1 and L_2.

Let us recall some notation.

Let $P(z)$ be a polynomial of degree q. Write

$$P'(z)=a(z-d_1)^{q_1}(z-d_2)^{q_2}\cdots(z-d_k)^{q_k},\ d_i\neq d_j,\ a\neq 0$$

The number k is called the derivative index of $P(z)$.

Definition 1 [7]. Let $\mathcal{F}$ be a subset of meromorphic functions. A polynomial $P(z)$ is called a strong uniqueness polynomial for functions in the class $\mathcal{F}$ if for two arbitrary nonconstant meromorphic functions $f,g\in\mathcal{F}$ the condition $P(f)=cP(g), c\neq 0$, implies $f=g$.

The main result of the present paper is the following.

Theorem 4. Let $P(z)$ be a polynomial of degree q without multiple zeros, let S be the zero set of $P(z)$, and let k be the derivative index of P. Assume that $P(z)$ is a strong uniqueness polynomial for L-functions. Then $L_1\equiv L_2$ whenever $E_{L_1,m)}(S)=E_{L_2,m)}(S)$ and one of the following conditions is satisfied:

(i) $m=1$ and $q\ge 2k+5$;

(ii) $2\le m<\infty$ and $q\ge 2k+3$.

Remark 1. Take, for example, $P(z)=z^7+1$. Then $P(z)$ is a strong uniqueness polynomial for L-functions by [6, Theorem 1.3]. Here we can take $m=1, q=7, k=1$, and

$S = \{\eta_i; \eta_i^7 = -1, i = 1, \cdots, 7\}$ in Theorem 4. Assume that an L-function $L(s)$ has the following property: α is a simple solution of the equation $L(s) = \eta_i$ for some $i, 1 \leq i \leq 7$, if and only if there exists a $j, 1 \leq j \leq 7$, such that α is a simple solution of the equation $\zeta(s) = \eta_j$. Then $L \equiv \zeta$. Note that all the zeros of the ζ-function are conjectured to be simple.

2. Some Lemmas

We need some lemmas.

Lemma 1 [8]. For any nonconstant meromorphic function f,

$$N\left(r, \frac{1}{f'}\right) \leq N\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}(r, f) + S(r, f)$$

Lemma 2. Let f and g be two nonconstant meromorphic functions, and let m be a positive integer. Set

$$F = \frac{1}{f},\ G = \frac{1}{g},\ H = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'}$$

Suppose that $H \not\equiv 0$ and $E_{f,m)}(0) = E_{g,m)}(0)$. Then

$$N(r, H) \leq \bar{N}_{(2}(r, f) + \bar{N}_{(2}(r, g) + \bar{N}_{(m+1}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(m+1}\left(r, \frac{1}{g}\right)$$
$$+\bar{N}\left(r, \frac{1}{f'}; f \neq 0\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{g'}; g \neq 0\right).$$

For the proof, see [9].

Lemma 3 [9]. In the notation of Lemma 2, if a is a common simple zero of f and g, then $H(a) = 0$.

Lemma 4. Let f be a nonconstant meromorphic function. Then

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{2}\bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \frac{1}{2}\bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{f}\right) \tag{2.1}$$

Moreover, for an integer $l \geq 4$ we have

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(l}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \frac{1}{2}\bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leq \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{f}\right) \tag{2.2}$$

Indeed, we have

$$\begin{aligned}
&\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \frac{1}{2}\bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \frac{1}{2}\bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[2\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right] \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(2}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{f}\right) - \bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right] \\
&\quad = \frac{1}{2}\left[\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(2}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{f}\right)\right] \\
&\quad \leq \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{f}\right)
\end{aligned}$$

For(2.2),

$$
\begin{aligned}
\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(l}\left(r,\frac{1}{f}\right) - \frac{1}{2}\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f}\right) &= \frac{1}{2}\left(2\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + 2\bar{N}_{(l}\left(r,\frac{1}{f}\right) - \bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right) + 2\bar{N}_{(l}\left(r,\frac{1}{f}\right) - \bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{f}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right) + 2\bar{N}_{(l}\left(r,\frac{1}{f}\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\bar{N}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(3}\left(r,\frac{1}{f}\right) + \bar{N}_{(l}\left(r,\frac{1}{f}\right)\right] \\
&\leq \frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{f}\right)
\end{aligned}
$$

Lemma 5 [1]. Let L be a nonconstant L-function. Then

(i) $T(r,L) = (d_L/\pi)r\log r + O(r)$, where $d_L = 2\sum_{i=1}^{K}\lambda_i$ is the degree of the L-function and K and λ_i are, respectively, the positive integer and the positive real number in the functional equation of the definition of L-functions.

(ii) $N(r,1/L) = (d_L/\pi)r\log r + O(r)$ and $N(r,L) = S(r,L)$.

(iii) The order of an L-function is not greater than 1 .

Lemma 6 [10]. Let L be a nonconstant L-function, and let $a \in \mathbb{C}$. Then the equation $L = a$ has infinitely many solutions.

Lemma 7. Let $P(z)$ be a nonconstant polynomial. Assume that there exist two nonconstant L-functions L_1 and L_2 such that

$$\frac{1}{P(L_1)} = \frac{c}{P(L_2)} + c_1$$

where $c, c_1 \in \mathbb{C}$ and $c \neq 0$. Then $c_1 = 0$.

Proof. Consider the equation $1/P(L_1) = c/P(L_2) + c_1$. Suppose the contrary: $c_1 \neq 0$. Then

$$\frac{P(L_1)}{c_1 P(L_2)} = P(L_1) + \frac{c}{c_1}$$

Suppose that $P(z) + c/c_1$ has distinct zeros $e_1, e_2, \cdots, e_k$ with multiplicities $l_1, l_2, \cdots, l_k$, respectively, $1 \leq k \leq n$, so that $l_1 + \cdots + l_k = n$. Then we have

$$\frac{P(L_1(s))}{c_1 P(L_2(s))} = P(L_1(s)) + \frac{c}{c_1} = (L_1(s) - e_1)^{l_1} \cdots (L_1(s) - e_k)^{l_k} \tag{2.3}$$

It follows from (2.3) and the relation $c/c_1 \neq 0$ that if a is a solution of the equation $L_1(s) - e_j = 0$ for some j, then $P(L_1(a)) \neq 0$ and a is a pole of L_2. Therefore, since L_2 has only one possible pole at $s = 1$, we see that $(L_1(s)e_1)^{l_1} \cdots (L_1(s) - e_k)^{l_k}$ has finitely many zeros. This means that for every $i = 1,2,\cdots,k$ the equation $L_1(s) = e_i$ has finitely many solutions, which contradicts Lemma 6 .

The proof of Lemma 7 is complete.

3. Proof of Theorem 4

Recall that

$$P(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_q),\ P'(z) = q(z - d_1)^{q_1}(z - d_2)^{q_2} \cdots (z - d_k)^{q_k}$$

where $d_i \neq d_j$ for $i \neq j$ and $q_1 + \cdots + q_k = q - 1$.

Set

$$F = \frac{1}{P(L_1)},\ G = \frac{1}{P(L_2)},\ H = \frac{F''}{F'} - \frac{G''}{G'}$$

First, we prove that $H \equiv 0$; then there exists a constant $C \neq 0$ such that $P(L_1) = CP(L_2)$. Since P is a strong uniqueness polynomial, it follows that $L_1 \equiv L_2$.

For simplicity, set

$$T(r) = T(r, L_1) + T(r, L_2),\ S(r) = S(r, L_1) + S(r, L_2)$$

Then we have

$$T(r, P(L_1)) = qT(r, L_1) + S(r, L_1),\ T(r, P(L_2)) = qT(r, L_2) + S(r, L_2)$$

and hence

$$S(r, P(L_1)) = S(r, L_1),\ S(r, P(L_2)) = S(r, L_2)$$

because $P(L_1)$ and L_1, as well as $P(L_2)$ and L_2, have the same growth estimates.

Suppose that $H \not\equiv 0$.

Claim 1. For $m \geq 1$, we have

$$N(r, H) \leq kT(r) + \bar{N}_{(m+1}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}_{(m+1}\left(r, \frac{1}{P(L_2)}\right)$$

where $N_o(r, 1/L'_i)$ is the counting function of those zeros of L'_i which are not zeros of any function $(L_i - a_j)$ or $(L_i - d_l), j \in \{1,2, \cdots, q\}, l \in \{1,2, \cdots, k\}, i = 1,2.$

Indeed, since H has only simple poles, from Lemma 2 we obtain

$$N(r, H) \leq \bar{N}(r, P(L_1)) + \bar{N}(r, P(L_2)) + \bar{N}_{(m+1}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}_{(m+1}\left(r, \frac{1}{P(L_2)}\right)$$

$$+\bar{N}\left(r, \frac{1}{P'(L_1)}; P(L_1) \neq 0\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{P'(L_2)}; P(L_2) \neq 0\right) + S(r)$$

where $N_o(r, 1/L'_i)$ is the counting function of those zeros of L'_i which are not zeros of any function $(L_i - a_j)$ or $(L_i - d_l), j \in \{1,2, \cdots, q\}, l \in \{1,2, \cdots, k\}, i = 1,2.$

On the other hand,

$$\bar{N}(r, P(L_1)) = \bar{N}(r, L_1) = S(r)$$

and a similar relation holds for $P(L_2)$; so we have

$$N(r, H) \leq \bar{N}_{(m+1}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}_{(m+1}\left(r, \frac{1}{P(L_2)}\right)$$

Moreover,

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{[P(L_1)]'};P(L_1)\neq 0\right)$$
$$=\bar{N}\left(r,\frac{1}{(L_1-d_1)^{q_1}(L_1-d_2)^{q_2}\dots(L_1-d_k)^{q_k}L_1'};(L_1-a_1)\dots(L_1-a_q)\neq 0\right)$$

In a similar way,

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{[P(L_2)]'};P(L_2)\neq 0\right)\leq kT(r,L_2)+N_o\left(r,\frac{1}{L_2'}\right)+S(r,L_2) \qquad (3.4)$$

Therefore, (3.1) follows from inequalities (3.2), (3.3), and (3.4).

Recall that by the hypothesis,

$$\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right)=\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{P(L_2)}\right)$$

and we denote this common value by $N_{1)}(r)$. Moreover, if a is a common simple zero of $P(L_1)$ and $P(L_2)$, then $H(a)=0$ by Lemma 3 . Therefore,

$$N_1(r)\leq N\left(r,\frac{1}{H}\right)\leq T(r,H)\leq N(r,H)+S(r) \qquad (3.5)$$

because, by the lemma on logarithmic derivatives, we have $m(r,H)=o(T(r,H))$ and, obviously, also $S(r,H)=S(r)$.

Next, we prove the following.

Claim 2. For $m\geq 1$, we have

$$(q-k-1)T(r)\leq \bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right)+\bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_2)}\right)$$
$$+\bar{N}_{(m+1}\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right)+\bar{N}_{(m+1}\left(r,\frac{1}{P(L_2)}\right)-N_{1)}(r)+S(r)$$

Indeed, applying the second main theorem to L_1 and the values $a_1,a_2,\cdots,a_q,d_1,d_2,\cdots,d_k,\infty$, we obtain

$$(q+k-1)T(r,L_1)\leq \bar{N}(r,L_1)+\sum_{i=1}^{k}\bar{N}\left(r,\frac{1}{L_1-d_i}\right)$$
$$+\sum_{i=1}^{q}\bar{N}\left(r,\frac{1}{L_1-a_i}\right)-N_o\left(r,\frac{1}{L_1'}\right)+S(r,L_1)$$

By Lemma 5 , we have $\bar{N}(r,L_1)=S(r,L_1)$. On the other hand,

$$\sum_{i=1}^{k}\bar{N}\left(r,\frac{1}{L_1-d_i}\right)\leq kT(r,L_1)+S(r,L_1)$$

and

$$\sum_{i=1}^{q}\bar{N}\left(r,\frac{1}{L_1-a_i}\right)=\bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right)$$

Then we have

$$(q-1)T(r,L_1) \le \bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right) - N_o\left(r,\frac{1}{L_1'}\right) + S(r,L_1)$$

Combining this with the similar inequality for L_2, we obtain

$$(q-1)T(r) \le \bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_2)}\right) - N_o\left(r,\frac{1}{L_1'}\right) - N_o\left(r,\frac{1}{L_1'}\right) + S(r)$$

From this and (3.5), we have

$$(q-1)T(r) \le \bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_2)}\right) - N_o\left(r,\frac{1}{L_1'}\right) - N_o\left(r,\frac{1}{L_1'}\right)$$
$$-N_{1)}(r) + N(r,H) + S(r)$$

Then Claim 2 follows from this relation and Claim 1.

Now we return to the proof of Theorem 4.

Case of $m = 1$ and $q \ge 2k+5$.

Assume that $E_{L_1,1)}(S) = E_{L_2,1)}(S)$.

By Claim 2,

$$(q-k-1)T(r) \le \bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_2)}\right)$$

Applying Lemma 1, we have

$$\begin{aligned}\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right) &= \sum_{i=1}^{k} \bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{L_1-a_i}\right) \le N\left(r,\frac{1}{L_1'}\right)\\ &\le N\left(r,\frac{1}{L_1}\right) + \bar{N}(r,L_1) + S(r,L_1)\\ &\le T(r,L_1) + S(r,L_1)\end{aligned}$$

In a similar way,

$$\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{P(L_2)}\right) \le T(r,L_2) + S(r,L_2)$$

Therefore,

$$\bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}_{(2}\left(r,\frac{1}{P(L_2)}\right) \le T(r) + S(r) \tag{3.7}$$

On the other hand, for $j = 1,2$, from Lemma 4 we have

$$\begin{aligned}\bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_j)}\right) - \frac{1}{2}\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{P(L_j)}\right) &\le \bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_j)}\right)\\ &\quad + \frac{1}{2}\bar{N}_{(3}\left(r,\frac{1}{P(L_j)}\right) - \frac{1}{2}\bar{N}_{1)}\left(r,\frac{1}{P(L_j)}\right)\\ &\le \frac{1}{2}N\left(r,\frac{1}{P(L_j)}\right)\end{aligned}$$

Therefore,

$$\bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}\left(r,\frac{1}{P(L_2)}\right) - N_{1)}(r) \le \frac{1}{2}\left[N\left(r,\frac{1}{P(L_1)}\right) + N\left(r,\frac{1}{P(L_2)}\right)\right]$$

From (3.6), (3.7), and (3.8), we have

$$(q-k-1)T(r) \leq \frac{q}{2}T(r) + T(r) + S(r)$$

which contradicts $q \geq 2k+5$.

Now consider the case of $m \geq 2$.

Subcase of $m = 2$ and $q \geq 2k+3$.

From Claim 2, we have

$$(q-k-1)T(r) \leq \bar{N}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{P(L_2)}\right)$$

Obviously,

$$\bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) = \sum_{i=1}^{k} \bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{L_1 - a_i}\right) \leq \bar{N}_{(2}\left(r, \frac{1}{L_1'}\right) \leq \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{L_1'}\right)$$

Applying Lemma 1, we have

$$\begin{aligned}\bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) &\leq \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{L_1'}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{L_1}\right) + \frac{1}{2}\bar{N}(r, L_1) + S(r, L_1) \\ &\leq \frac{1}{2}T(r, L_1) + S(r, L_1)\end{aligned}$$

Combining this with the similar inequality for L_2, we obtain

$$\bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{P(L_2)}\right) \leq \frac{1}{2}T(r) + S(r) \tag{3.10}$$

On the other hand, by Lemma 4 we have

$$\begin{aligned}\bar{N}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) + \frac{1}{2}\bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) - \frac{1}{2}\bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) &\leq \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) \\ &\leq \frac{q}{2}T(r, L_1)\Bigg) + S(r, L_1)\end{aligned}$$

Combining this with the similar inequality for L_2, we obtain

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{P(L_2)}\right) + \frac{1}{2}\bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) + \frac{1}{2}\bar{N}_{(3}\left(r, \frac{1}{P(L_2)}\right) - N_{1)}(r)$$

It follows from inequalities (3.9), (3.10), and (3.11) that

$$(q-k-1)T(r) \leq \frac{q}{2}T(r) + \frac{1}{4}T(r) + S(r)$$

a contradiction to $q \geq 2k+3$.

Subcase of $m \geq 3$ and $q \geq 2k+3$.

Applying Claim 2, we have

$$(q-k-1)T(r) \le \bar{N}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{P(L_2)}\right)$$
$$+\bar{N}_{(m+1}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}_{(m+1}\left(r, \frac{1}{P(L_2)}\right) - N_{1)}(r) + S(r)$$

By Lemma 4 ,

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) + \bar{N}_{(m+1}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) - \frac{1}{2}\bar{N}_{1)}\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right) \le \frac{1}{2}N\left(r, \frac{1}{P(L_1)}\right)$$
$$\le \frac{q}{2}T(r, L_1) + S(r, L_1)\Big)$$

Combining this with the similar inequality for L_2, we obtain

$$(q-k-1)T(r) \le \frac{q}{2}T(r) + S(r)$$

which contradicts $q \ge 2k+3$.

Thus, we have proved that $H \equiv 0$. Therefore, $1/P(L_1) = c/P(L_2) + c_1$ for some constants $c(\neq 0)$ and c_1. By Lemma $7, c_1 = 0$.

Thus, there exists a constant $C \neq 0$ such that $P(L_1) = CP(L_2)$. Since $P(z)$ is a strong uniqueness polynomial for L-functions, we obtain $L_1 \equiv L_2$.

REFERENCES

[1] J. Steuding, *Value-Distribution of L-functions, in Lecture Notes in Mathematics*, 1877 (Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2007).

[2] P. C. Hu and B. Q. Li, "A simple proof and strengthening of a uniqueness theorem for L-functions," Canad. Math. Bull. 59, 119-122. (2016).

[3] J. Steuding, "How many values can L-functions share?," Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb. 77, 70-81 (2004).

[4] B. Q. Li, "A uniqueness theorem for Dirichlet series satisfying a Riemann type functional equation," Adv. Math. 226, 4198-4211 (2011).

[5] P. C. Hu and A. D. Wu, "Uniqueness theorems for Dirichlet series," Bull. Aust. Math. Soc. 91, 389-399 (2015).

[6] H. K. Ha and H. A. Vu, "Determining an L-function in the extended Selberg class by its preimages of subsets," Ramanujan J. 58, 253-267 (2022).

[7] H. K. Ha and C. C. Yang, "On the functional equation $P(f) = Q(g)$," in *Value Distribution Theory and Related Topics. Advanced Complex Analysis and Application*, (Kluwer Academic, Boston, MA, 2004), Vol. 3, pp. 201-208.

[8] W. K. Hayman, Meromorphic Functions (Clarendon, Oxford, 1964).

[9] H. K. Ha, H. A. Vu, and X. L. Nguyen, "Strong uniqueness polynomials of degree 6 and unique range sets for powers of meromorphic function," Int. J. Math. 29, 1850037 (2018).

[10] P. Lin and W. Lin, "Value distribution of L-functions concerning sharing sets," Filomat 30, 3795-3806 (2016).

TRÍ TUỆ NHÂN TẠO TRONG NGHIÊN CỨU VÀ GIẢNG DẠY ĐẠI HỌC

ThS. Phạm Thị Loan [1], ThS. Nguyễn Thị Thanh Tâm [1]

[1] Khoa Công nghệ thông tin - Trường Đại học Hải Dương

Tóm tắt: Trí tuệ nhân tạo (Artificial Intelligence - AI) đang bùng nổ và có khả năng làm thay đổi mọi mặt trong đời sống nhân loại. Trong giáo dục, AI đang tạo ra những phương pháp dạy và học mới đang được thử nghiệm trong những điều kiện và ở nhiều quốc gia với trình độ phát triển khác nhau và đạt những mức độ thành công khác nhau. Bài báo giới thiệu các lĩnh vực của AI đối với việc dạy và học ở các trường đại học nói chung từ đó đưa ra các khó khăn và giải pháp.

Từ khóa: *Trí tuệ nhân tạo, giảng dạy, giáo dục, AI*

1. Đặt vấn đề

Ngày 25/01/2022, Thủ tướng Chính phủ ban hành Quyết định số 131/QĐ-TTg về việc phê duyệt Đề án Tăng cường ứng dụng công nghệ thông tin và chuyển đổi số trong giáo dục và đào tạo giai đoạn 2022-2025, định hướng đến năm 2030. Trong đó, xác định rõ mục tiêu chung là: tận dụng tiến bộ công nghệ để thúc đẩy đổi mới sáng tạo trong dạy và học, nâng cao chất lượng và cơ hội tiếp cận giáo dục, hiệu quả quản lý giáo dục; xây dựng nền giáo dục mở thích ứng trên nền tảng số, góp phần phát triển Chính phủ số, kinh tế số và xã hội số.

Một trong những công nghệ được nhắc đến nhiều trong một vài năm trở lại đây, góp phần tạo ra những bước đột phá mạnh mẽ và đem lại những kết quả "thần kỳ" chính là AI. AI là lĩnh vực liên ngành của Triết học, Tâm lý học, Khoa học thần kinh, Toán học, Điều khiển học, Khoa học máy tính, Ngôn ngữ học, Kinh tế [2]. Trong thời gian sắp tới, trí tuệ nhân tạo sẽ đóng vai trò quan trọng như một công cụ mạnh mẽ, giúp công nghệ thông tin trở nên phổ biến hơn trong đời sống hàng ngày và tạo ra những tiến bộ đáng kể trong lĩnh vực này.

Hiện nay, AI đang được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học và đời sống, trong đó có giáo dục. Một số cơ sở đào tạo đã từng bước đưa AI vào giảng dạy và quản lý góp phần tạo ra sự thay đổi rõ nét trong quản lý, giảng dạy.

Tại hội thảo quốc tế về giáo dục với chủ đề "Trí tuệ nhân tạo và tương lai của giáo dục" được Viện nghiên cứu cao cấp về Toán, Tổ chức The VietNam Foundation đồng tổ chức cùng 2 đơn vị đồng hành là Khan Academy Hoa Kỳ và Hội giảng dạy Toán học phổ thông Việt Nam, GS. Lê Anh Vinh, Viện trưởng Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam cho biết, AI đã được áp dụng trong quá trình dạy và học toán, chẳng hạn như Robot TODAI, nền tảng Got It của Hùng Trần, phổ biến nhất là hình học Anpha...

Việc dạy và học toán trên thế giới dần được áp dụng AI. Vậy có nên dạy những thứ trước nay đang dạy trong khi đang có nhiều người giải toán dưới hình hài Chat GPT hay AI để giúp đỡ con người. Theo GS. Lê Anh Vinh, sau khi học Toán, học sinh có thể phát triển nhiều kỹ năng như tư duy phê phán, tư duy phân tích, kỹ năng giải quyết vấn đề, lý giải bằng số liệu, kỹ năng lý giải logic...

Ứng dụng trí tuệ nhân tạo (AI) trong nghiên cứu và giảng dạy ở các trường đại học mang lại nhiều lợi ích đáng kể. Những ứng dụng này không chỉ giúp tăng cường hiệu suất và hiệu quả trong nghiên cứu và giảng dạy ở các trường đại học mà còn mở ra nhiều cơ hội mới trong việc tiến xa hơn trong sự phát triển tri thức và giáo dục.

2. Kết quả nghiên cứu

2.1. Trí tuệ nhân tạo trong giáo dục

J. McCarthy là người đầu tiên đưa cụm từ "Trí tuệ nhân tạo" trở thành một khái niệm khoa học. Nghiên cứu AI nhằm mô tả chính xác các khía cạnh của xử lý trí tuệ và học (để có được tri thức) và tạo ra được các hệ thống, máy mô phỏng hoạt động học và xử lý trí tuệ [3]. Trí tuệ nhân tạo trong giáo dục (Artificial Intelligence in Education - AIEd) ra đời vào khoảng những năm 1970 [4] và tập trung nghiên cứu, phát triển và đánh giá phần mềm máy tính để cải thiện việc giảng dạy và học tập. Mục tiêu dài hạn được xác định là nhằm thu thập phản hồi của người học, đánh giá năng lực người học và nguyên nhân yếu kém, cá nhân hóa cho một người hoặc nhóm người học, và cuối cùng là sử dụng các kỹ thuật của AI để tìm hiểu và phát triển các lý thuyết dạy - học [5].

Trong khi AI đặt học máy và trí thông minh giống con người làm trọng tâm, thì Giáo dục chú trọng bồi dưỡng năng lực học tập và trí tuệ con người. Kiến thức AIEd giúp thu hẹp khoảng cách này bằng cách cung cấp các kỹ thuật để thúc đẩy các tương tác hiệu quả và thông minh hơn với con người nhằm cải thiện kết quả, chất lượng giảng dạy trong giáo dục.

Trong tương lai gần, có thể chưa thấy sự xuất hiện phổ biến của các "robot giảng viên" thay thế hoàn toàn vai trò của người dạy nhưng bằng việc nghiên cứu, triển khai các sản phẩm sử dụng "trí thông minh máy móc" như hiện nay, quá trình dạy và học đã bước đầu có những chuyển biến tích cực

Trí tuệ nhân tạo trong giáo dục vô cùng quan trọng. Sự hợp nhất của AI với hệ thống học tập kỹ thuật số ngày nay tạo nên khái niệm học tập hoàn toàn mới. Trí tuệ nhân tạo trong giáo dục đã cách mạng hóa các phương pháp học tập truyền thống. Những ứng dụng của AI trong giáo dục không chỉ giúp tối ưu hóa quá trình học tập và giảng dạy mà còn mở ra nhiều cơ hội mới trong việc tạo ra môi trường học tập đa dạng, phong phú và linh hoạt. Tuy nhiên, cần phải cân nhắc kỹ lưỡng để đảm bảo rằng việc sử dụng AI luôn mang lại lợi ích cao nhất cho sinh viên và giáo viên.

2.2. Học Toán nhờ AI

Việc dạy và học toán trên thế giới dần được áp dụng AI. Vậy có nên dạy những thứ trước nay đang dạy trong khi đang có nhiều người giải toán dưới hình hài Chat GPT hay AI để giúp đỡ con người.

Có nhiều học sinh học yếu môn toán và không thể theo được những bài tập trên lớp. Với những học sinh này thì nhiệm vụ của thầy cô là giúp các em thấy toán học hấp dẫn hơn. Bởi, khi học sinh bị ám ảnh mình không giỏi toán thì sẽ tạo ra gánh nặng tâm lý, mất động lực học.

Đề cập băn khoăn của nhiều người về việc học toán nhưng không có tư duy sâu, GS. Lê Anh Vinh, Viện trưởng Viện Khoa học Giáo dục Việt Nam cho biết: "Mục tiêu giảng dạy toán ở trường là giúp các em tìm được tình yêu với môn toán và thích học môn học này. Nhiều em đặt ra câu hỏi "Vì sao em phải học toán?" thì mục tiêu chúng ta cần làm là giúp các em hiểu tầm quan trọng của học toán. Nếu các em đặt câu hỏi mà chúng ta không trả lời được thì các em sẽ đi tìm câu trả lời ở AI. Vì vậy, tôi cho rằng câu câu trả lời của người thật phải hay hơn AI.".

Giáo viên phải giúp các em phát triển khả năng tư duy, suy luận logic, đề xuất vấn đề và giải quyết vấn đề. Trong các lớp học, chúng ta có thể không quan tâm tại sao học sinh yếu môn toán, không thích môn toán, không hiểu được tầm quan trọng của môn toán nhưng chúng ta lại muốn kết quả cuối cùng phát triển tư duy này cho các em. Điều này hơi khó. Đó là lý do vì sao tôi cho rằng công nghệ có thể tham gia giúp học sinh giải được các bài toán, giúp các em yêu môn toán, hiểu tầm quan trọng của học toán, từ đó phát triển tư duy kỹ năng của các em.

2.3. Ứng dụng trí tuệ nhân tạo trong nghiên cứu và giảng dạy toán học ở các trường đại học

Ứng dụng AI có thể mang lại nhiều lợi ích cho giáo dục đại học, từ các mô hình, bài học thực tiễn ứng dụng công nghệ trong doanh nghiệp. AI giúp sinh viên học tập hiệu quả hơn, hỗ trợ giảng viên trong giảng dạy và nghiên cứu, trợ giúp các cơ sở giáo dục trong việc quản lý và vận hành.

2.3.1. Hỗ trợ hoạt động quản lý, chuyên môn cho các giảng viên

Theo cách thức giáo dục truyền thống, giảng viên thường mất nhiều thời gian để thực hiện các công việc "lặp đi lặp lại" như phân loại bài tập về nhà, đánh giá tiểu luận, chấm bài cho sinh viên. Không những vậy, những công việc này còn gây ra cảm giác nhàm chán, mệt mỏi cho giảng viên.

AI góp phần tự động hóa và thực hiện các hoạt động quản trị, chuyên môn nói trên cho các giảng viên, cụ thể:

- Hệ thống Điểm danh Kỹ thuật số: Với hệ thống điểm danh tự động, sinh viên có thể vuốt thẻ ID hoặc phần mềm nhận diện khuôn mặt có thể xác định họ, làm cho quy trình trở nhanh chóng hơn.

- Lên lịch Thông minh: Hệ thống AI có thể tối ưu hóa lịch trình, đảm bảo rằng các lớp học, phòng thí nghiệm hoặc thư viện không xung đột, được sử dụng một cách hiệu quả dựa trên số lượng sinh viên trong lớp và sinh viên có thời gian phù hợp nhất.

- Chấm điểm và Phản hồi Thời gian thực về Bài tập: AI có thể đánh giá ngay lập tức bài tập của sinh viên, nhấn mạnh các vấn đề đáng lo ngại và đưa ra phản hồi, giúp giảng viên can thiệp kịp thời khi một sinh viên có dấu hiệu khó khăn. Phản hồi được cung cấp có thể tương tự như của một người viết bài tiểu luận gốc đưa ra ý kiến, đảm bảo tính rõ ràng và liên kết trong bài nộp của sinh viên.

- Phân tích Dự đoán về Hiệu suất sinh viên: Bằng cách phân tích dữ liệu, AI có thể dự đoán những sinh viên có nguy cơ điểm thấp, cho phép can thiệp kịp thời.

- Thông báo và Cảnh báo Giáo viên và học sinh: Công cụ tự động hóa có thể gửi thông báo về các kỳ thi sắp tới, hạn nộp bài tập hoặc các sự kiện của trường trực tiếp đến điện thoại hoặc email của sinh viên.

- Thu thập Phản hồi: Việc thu thập phản hồi về các khóa học hoặc phương pháp giảng dạy có thể được tự động hóa bằng các cuộc khảo sát kỹ thuật số. Điều này không chỉ đơn giản hóa quá trình thu thập mà còn làm cho việc phân tích dữ liệu trở nên nhanh chóng và chính xác hơn.

- Giám sát Kỳ thi Tự động: Để đối phó với thách thức của việc gian lận trong kỳ thi trực tuyến, nhiều trường học có thể sử dụng phần mềm giám sát kỳ thi tự động. Các công cụ này theo dõi sinh viên qua webcam của họ trong suốt bài kiểm tra. Sử dụng Trí tuệ Nhân tạo, phần mềm có thể nhận biết những chuyển động hoặc hoạt động đáng ngờ, như sinh viên thường xuyên nhìn ra xa khỏi màn hình hoặc có người khác vào phòng.

- Dịch Ngôn ngữ Thời gian thực: Trong một lớp học đa dạng với sinh viên đến từ nhiều nền ngôn ngữ khác nhau, khi một giáo viên giảng bằng tiếng Anh, các công cụ được định hướng bởi Trí tuệ Nhân tạo có thể đồng thời ghi âm và dịch nội dung thành nhiều ngôn ngữ khác nhau.

- Nhóm nghiên cứu đã tiến hành khảo sát trên lớp K13.CNTT của trường Đại học Hải Dương (môn Đại số, Giải tích, Toán rời rạc), kết quả cho thấy việc giảng viên sử dụng các ứng dụng của trí tuệ nhân tạo (sử dụng bài giảng kĩ thuật số, sử dụng phần mềm mô phỏng, làm bài kiểm tra online, …) giúp sinh viên tăng hứng thú với môn học, giảm áp lực học tập và đạt hiệu quả hơn so với việc sử dụng các phương pháp giảng dạy truyền thống.

2.3.2. Phát triển nội dung

Trí tuệ nhân tạo và máy học có khả năng giúp giảng viên và chuyên gia nghiên cứu sáng tạo ra nội dung để phù hợp, thuận tiện cho việc giảng dạy và học tập.

Ứng dụng công nghệ trí tuệ nhân tạo trong giáo dục giúp tạo ra bài học thông qua các tài liệu nghiên cứu có dung lượng lưu trữ thấp, ở định dạng kỹ thuật số. Bằng cách này, người dùng tận dụng được toàn bộ tài liệu nghiên cứu mà không chiếm nhiều dung lượng trong hệ thống. AI cũng cho phép người dùng tạo và đăng tải thông tin thường xuyên để bài học luôn cập nhật theo thời gian. Người dùng cũng nhận được thông báo mỗi khi dữ liệu mới được thêm vào.

2.3.3. Cá nhân hóa việc học tập

Cá nhân hóa học tập là việc tạo ra môi trường học tập phù hợp với nhu cầu và khả năng của từng sinh viên. AI có thể giúp cá nhân hóa việc học tập theo nhiều cách khác nhau, bao gồm:

- Phân tích dữ liệu học tập: AI có thể phân tích dữ liệu học tập của sinh viên, bao gồm điểm số, bài tập, thời gian học tập, v.v., để xác định điểm mạnh, điểm yếu và nhu cầu học tập của từng người.

- Đề xuất bài học và lộ trình học tập: Dựa trên dữ liệu học tập, AI có thể đề xuất những bài học và lộ trình học tập phù hợp với từng sinh viên.

- Cung cấp phản hồi cá nhân: AI có thể cung cấp phản hồi cá nhân cho sinh viên về bài tập, bài kiểm tra và quá trình học tập của họ.

2.4. Những khó khăn, thách thức và đề xuất giải pháp khắc phục của việc ứng dụng AI trong giáo dục đại học

2.4.1. Khó khăn, thách thức

Thứ nhất, sự phát triển của các chính sách liên quan đến AI trong giáo dục vẫn còn sơ khai, chưa theo kịp diễn biến của thực tiễn trong khi đây là một lĩnh vực rất có thể sẽ phát triển theo cấp số nhân trong mười năm tới.

Thứ hai, AI cũng có thể góp phần tạo ra sự bất bình đẳng giữa các nhóm dân số thiệt thòi và yếu thế có nhiều khả năng bị loại khỏi giáo dục được hỗ trợ bởi AI. Theo Hilbert (2015), việc thiếu các điều kiện hạ tầng cơ bản thiếu cơ sở hạ tầng cơ bản cũng tạo ra một khoảng cách kỹ thuật số mới trong việc sử dụng kiến thức dựa trên dữ liệu để đưa ra quyết định thông minh.

Thứ ba, thế hệ giảng viên hiện đang chưa theo kịp được thời cuộc, chưa đáp ứng được yêu cầu sử dụng công cụ AI. Để có thể sử dụng các công cụ có sự hỗ trợ của AI một cách hiệu quả, giảng viên phải có được các kỹ năng mới sau:

- Hiểu rõ về cách mà các hệ thống với sự hỗ trợ AI có thể tạo điều kiện và làm cho quá trình dạy học trở nên hiệu quả hơn.

- Có các kỹ năng về nghiên cứu, phân tích dữ liệu; kỹ năng quản lý mới để có thể quản lý được nguồn nhân lực và AI theo ý muốn chủ quan.

- Giúp người học có được những kỹ năng và năng lực mà máy móc không thể thay thế được.

Thứ tư, dữ liệu là một trong những yếu tố quan trọng để đảm bảo tính chính xác của các thuật toán máy học và khả năng dự đoán của AI. Tuy nhiên, nhiều quốc gia vẫn gặp khó khăn trong việc thu thập dữ liệu giáo dục. Dữ liệu giáo dục phải mở và được sử dụng ở cấp trường. Ngoài ra, khi thu thập dữ liệu phải đảm bảo được tính đại diện về nhân khẩu học (độ tuổi, giới tính, nền tảng xã hội) (UNESCO, 2018) nhằm cho ra những kết quả phân tích đầy đủ về các nhóm yếu thế, dễ bị tổn thương. Đây là một thách thức lớn trong ứng dụng AI vào giáo dục.

2.4.2. Giải pháp

Để phát huy được những cơ hội và khắc phục được những hạn chế của AI trong giáo dục đại học, cần lưu ý các giải pháp sau:

- Về phía Chính phủ

Chính phủ cần sớm nghiên cứu, ban hành những quy định, khung pháp lý để kiểm soát và quản lý các hoạt động liên quan đến AI. Việt Nam ưu tiên xây dựng, hoàn thiện chính sách, pháp luật tạo hành lang pháp lý thông thoáng đáp ứng yêu cầu thúc đẩy nghiên cứu, phát triển và ứng dụng trí tuệ nhân tạo vào giáo dục. Tạo cơ chế thông thoáng, thúc đẩy cơ sở giáo dục từ Trung ương đến địa phương sử dụng các ứng dụng, dịch vụ trí tuệ nhân tạo để tạo những bước đột phá trong quản lý điều hành. Thúc đẩy chia sẻ dữ liệu phục vụ nghiên cứu, phát triển và ứng dụng, hình thành các cơ sở dữ liệu dùng chung, chia sẻ, mở để nghiên cứu, phát triển các ứng dụng trí tuệ nhân tạo.

- Về phía ngành giáo dục

Giảng viên cần trang bị cho sinh viên các kỹ năng cơ bản để sử dụng AI hiệu quả, giúp họ hiểu được tầm quan trọng của việc đặt câu hỏi và phân tích dữ liệu để tạo kết quả tin cậy, đồng thời cần thúc đẩy sự phát triển kỹ năng tư duy phản biện và khả năng đưa ra các câu hỏi sáng tạo.

Việc tiếp cận với AI từ trên ghế nhà trường giúp sinh viên có được chuyên môn sâu hơn về các công nghệ mới nhất. Thông qua các khóa học đào tạo, hội thảo và nghiên cứu, sinh viên có thể có kiến thức và kỹ năng cần thiết để làm việc với AI trong tương lai. Có thể bắt đầu bằng cách học các khóa học trực tuyến, tìm hiểu các ứng dụng thân thiện với người dùng, dần dần tăng cường kỹ năng và kiến thức của mình trong lĩnh vực công nghệ.

3. Kết luận

Đối với giáo dục nói chung và giáo dục đại học nói riêng, việc ứng dụng AI sẽ là một hướng đi cần được thúc đẩy mạnh mẽ trong thời gian đến vì những tính tích cực mà AI mang lại, trong đó nổi bật là việc công nghệ giảm thiểu những thủ tục hành chính, những công việc chiếm nhiều thời gian của giảng viên như chấm bài, điểm danh. với AI, mọi việc có thể được tự động hoá. Cá nhân hoá chương trình học tập và sự xuất hiện của “gia sư ảo”/”trợ lý ảo” sẽ góp phần tạo ra những sự khác biệt trong nền giáo dục có sự hỗ trợ của AI. Một điểm nổi bật khác chính là việc AI tạo ra sự hứng khởi cho người học với những phản hồi thông tin theo thời gian thực, người học sẽ tăng thời gian tương tác với hệ thống do có cảm giác được hỗ trợ nhiệt tình và ngay lập tức. Những kết quả nghiên cứu, đánh giá nói trên là cơ sở hết sức quan trọng, tạo tiền đề cho sự nghiên cứu và phát triển tiếp theo nhằm đưa ra những mô hình, giải pháp phù hợp để ứng dụng AI vào giảng dạy bậc đại học một cách khoa học và hiệu quả.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Bali, Maha, *Against the 3A's of EdTech: AI, Analytics, and Adaptive Technologies in Education*, November 29, Accessed December 20,

[2] Stuart Russell, Peter Norvig, "Artificial Intelligence A Modern Approach", *3rd Global Edition, Pearson*, 2016.

[3] John McCarthy, M.L. Minsky, N. Rochester, C.E.Shannon, "A Proposal for the Dartmouth summer conference on artificial intelligence", *AIMagazine,* 31 Aug. 1955.

[4] Judy Kay, "Whither or wither AI and education?", *Seventeenth International Conference on Artificial Intelligence in Education* (AIED 2015 Workshop Proceedings), Vol 4, 2015, 85 (1-10)

[5] Beverly Park Woolf, "AI and Education: Celebrating 30 years of Marriage", *Seventeenth International Conference on Artificial Intelligence in Education* (AIED 2015 Workshop Proceedings), Vol 4, 2015, 85 (38-45)

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP BIỂU DIỄN TRỰC TIẾP DỮ LIỆU NHIỀU CHIỀU

PGS.TS. Trần Văn Long [1]

[1] Khoa Khoa học cơ bản, Trường Đại học Giao thông vận tải

Tóm tắt: Trực quan hoá dữ liệu nhiều chiều được ứng dụng trong nhiều các lĩnh vực khoa học khác nhau đặc biệt thường xuyên sử dụng trong các phân tích dữ liệu. Trực quan hoá dữ liệu nhiều chiều là sử dụng các phương pháp để chiếu dữ liệu nhiều chiều xuống không gian biểu diễn dữ liệu (2D hoặc 3D) để trực tiếp quan sát được dữ liệu và bảo toàn một số tính chất mà chúng ta cần quan tâm. Có nhiều phương pháp biểu diễn dữ liệu khác nhau như: phương pháp biểu diễn hình học, phương pháp biểu diễn biểu tượng, phương pháp biểu diễn phân tầng, các phương pháp giảm số chiều của dữ liệu. Trong bài báo này, chúng ta giới thiệu các phương pháp biểu diễn trực tiếp dữ liệu dựa trên yếu tố hình học như: phương pháp SPLOM (Scatter plot matrix), Hệ tọa độ hình sao (Star Coordinates), Hệ tọa độ hướng tâm (Radviz), Hệ tọa độ song song (Parallel Coordinates). Đối với mỗi phương pháp biểu diễn dữ liệu chúng tôi giới thiệu về ý tưởng chính của phương pháp và đưa ra một vài ví dụ minh họa cụ thể cho một số dữ liệu thực tế.

Từ khóa: *Trực quan hoá, Dữ liệu nhiều chiều, SPLOM, Radviz, Hệ tọa độ hình sao, Hệ tọa độ song song*

1. Giới thiệu

Dữ liệu ngày nay đã trở thành một nhân tố quyết định trong nhiều lĩnh vực của khoa học kỹ thuật và cuộc sống. Dữ liệu được sinh ra hàng ngày và được thu thập liên tục với nhiều loại dữ liệu khác nhau với nhiều thuộc tính khác nhau. Các dữ liệu này cần được xử lý và phân tích để tìm thấy các thông tin hữu ích giúp người dùng đưa ra các quyết định dựa trên dữ liệu. Trực quan hoá dữ liệu là phương pháp đầu tiên được sử dụng để khai phá dữ liệu. Phân tích dữ liệu nhiều chiều thường được biểu diễn trên máy tính dưới nhiều dạng biểu diễn khác nhau. Đã có nhiều nghiên cứu về các phương pháp biểu diễn dữ liệu nhiều chiều và vẫn là bài toán quan trọng cần tiếp tục nghiên cứu và đưa ra các phương pháp mới để khám phá cấu trúc của dữ liệu [1].

Trong các phương pháp biểu diễn trực quan hoá dữ liệu nhiều chiều sử dụng các yếu tố hình học, các yếu tố biểu tượng. Đối với dữ liệu hai hoặc ba chiều ta có thể trực tiếp biểu diễn dữ liệu bởi các điểm trên hệ tọa độ Đề-các Oxy hoặc $Oxyz$ thông thường. Đối với dữ liệu có số chiều lớn hơn 3 thì ta không thể biểu diễn trực tiếp được. Một phương pháp biểu diễn dữ liệu nhiều chiều sử dụng các phép chiếu trực tiếp xuống các không gian hai chiều bằng cách biểu diễn tất cả các mối liên hệ giữa hai biến trong dữ liệu nhiều chiều là ma trận biểu đồ phân tán (scatter plot matrix hay viết gọn SPLOM). Phương pháp SPLOM biểu diễn dữ liệu nhiều chiều bằng cách biểu diễn nhiều lớp các biểu đồ phân tán. Nhược điểm của phương pháp này chỉ áp dụng đối với các loại dữ liệu có số chiều không quá lớn vì ta cần ma trận vuông có kích thước bằng số chiều của dữ liệu.

Trong các phương pháp trực quan hoá dữ liệu có các phương pháp biểu diễn trực tiếp từ các thuộc tính của dữ liệu tương tự như biểu diễn điểm trong hệ tọa độ Đề-các. Phương pháp hệ toạ độ hình sao được đề xuất năm 2000 [2,3] khi thay hệ biểu diễn cơ sở trực chuẩn bởi một hệ véc-tơ trong không gian biểu diễn, mỗi véc-tơ biểu diễn số chiều tương ứng của dữ liệu và điểm biểu diễn là tổ hợp tuyến tính của hệ véc-tơ biểu diễn số chiều. Ta có thể hình dung phương pháp hệ tọa độ hình sao là phép biến đổi tuyến tính dữ liệu xuống không gian hai chiều. Hạn chế của phương pháp hệ tọa độ hình sao là biểu diễn không duy nhất tuy nhiên sự biểu diễn trên giữ được cấu trúc tuyến tính của dữ liệu. Tối ưu hệ tọa độ hình sao trong biểu diễn bảo toàn cấu trúc nhóm dữ liệu được nghiên cứu trong [4].

Hệ tọa độ hướng tâm được đề xuất trong nghiên cứu về dữ liệu gene [5] là phương pháp chiếu phi tuyến của dữ liệu xuống đường tròn đơn vị dựa trên hệ cân bằng của lò xo và giữ được mối liên hệ của các thuộc tính dữ liệu với điểm biểu diễn. Hệ tọa độ hướng tâm tương tự như phương pháp hệ tọa độ hình sao chỉ khác là phép chiếu đầu tiên được áp dụng là chiếu xuyên tâm lên đơn hình đơn vị trong không gian chiều chiều [6]. Phương pháp hệ tọa độ hướng tâm được sử dụng nhiều trong các bài toán về phân tích gene [7, 9]. Một phương pháp mở rộng hệ tọa độ hướng tâm được mở rộng trong [8] thi thay thế các điểm biểu diễn bởi các cung tròn.

Các phương pháp đề xuất ở trên biểu diễn bởi các điểm có nhược điểm chính là biểu diễn không duy nhất. Phương pháp hệ tọa độ song song được nghiên cứu trong [10, 11] biểu diễn mỗi điểm nhiều chiều bằng một đường gấp khúc đi qua các điểm tương ứng với các thuộc tính của điểm nhiều chiều dựa trên các trục song song với nhau. Sự biểu diễn này là duy nhất nghĩa là biểu diễn trên mặt phẳng khổng bị mất thông tin. Cấu trúc của hình học biểu diễn được mô tả thông qua tính chất đối ngẫu giữa đường trong hệ tọa độ Đề-các và điểm trong hệ tọa độ song song. Phương pháp hệ tọa độ song song được ứng dụng trong khai phá dữ liệu nhiều chiều [11].

Một phương pháp khác được sử dụng trong biểu diễn dữ liệu nhiều chiều là phương pháp đường cong Andrews [12]. Phương pháp này biến đổi mỗi điểm dữ liệu nhiều chiều bởi một hàm số một biến và biểu diễn thông qua đồ thị của hàm số một biến trên một khoảng nào đó của đường thẳng thực.

Trong bài báo này chúng tôi giới thiệu chi tiết về ý tưởng và các tính chất cơ bản của các phương pháp biểu diễn dữ liệu nhiều chiều trực tiếp trong Phần 2 của bài báo. Trong phần tiếp theo chúng tôi giới thiệu một số vấn đề nghiên cứu đối với các phương pháp biểu diễn trên.

2. Trực quan hoá dữ liệu nhiều chiều

2.1. Dữ liệu nhiều chiều

Trong cả bài báo này chúng tôi sử dụng dữ liệu nhiều chiều gồm có p thuộc tính (số chiều). Giả sử bộ dữ liệu gồm có n quan sát, các quan sát được tổ chức dưới dạng một ma trận kích thước cỡ $n \times p$. Ta ký hiệu mỗi quan sát gồm có p thành phần là $x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ và ma trận dữ liệu là ma trận

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

Các phương pháp biểu diễn dữ liệu mà chúng tôi giới thiệu trong bài báo biểu diễn n quan sát hay có n đối tượng, mỗi đối tượng có số thuộc tính $p > 3$.

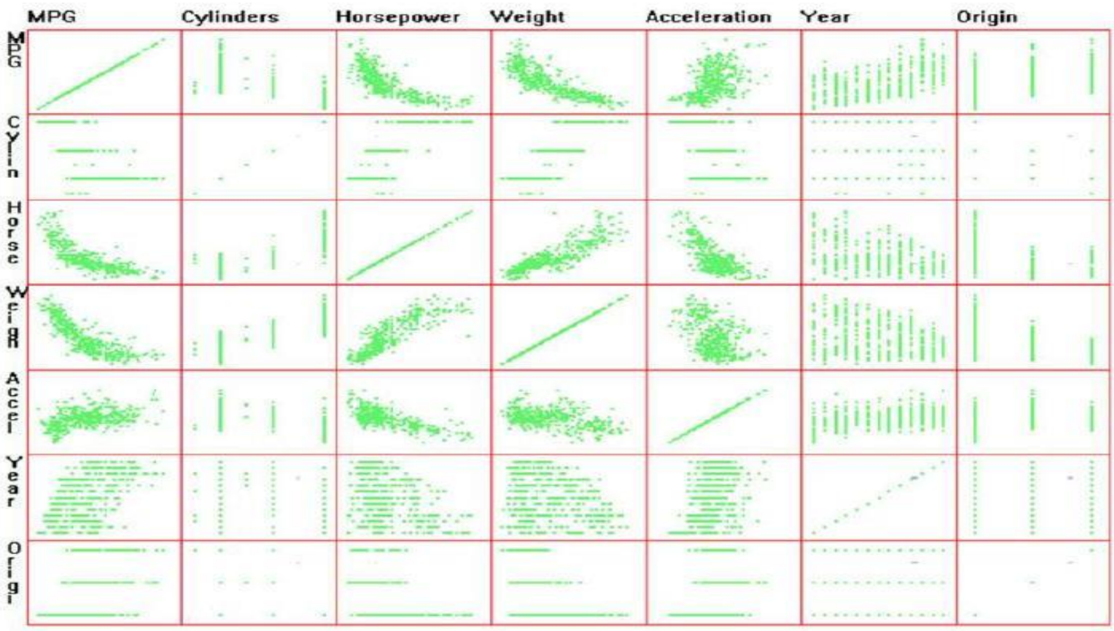
Dữ liệu Auto-Mpg gồm 398 quan sát với 7 thuộc tính: mpg, cylinders, horsepower, weight, acceleration, model_year, origin.

Dữ liệu Iris gồm 150 quan sát với 4 thuộc tính: sepal length, sepal width, petal length, petal width thuộc 3 nhóm: Iris Setosa, Iris Versicolour, Iris Virginica.

2.2. Splom

Đối với dữ liệu có số chiều $p = 2$ hoặc $p = 3$ thì chúng ta có thể biểu diễn trực tiếp bởi các điểm trên hệ toạ độ đề-các vuông góc Oxy hoặc $Oxyz$. Đối với dữ liệu có số chiều $p > 3$ thì ta không thể trực tiếp biểu diễn trực tiếp bởi các điểm được. Phương pháp ma trận biểu đồ phân tán (scatter plot matrix-SPLOM) được tổ chức bởi nhiều các biểu đồ phân tán hai chiều. Cụ thể chúng ta xây dựng một ma trận vuông kích thước p để biểu diễn dữ liệu. Mỗi phần tử của ma trận SPLOM biểu diễn dữ liệu phân tán của 2 thuộc tính thứ i và thứ j của dữ liệu ($i, j = 1,2, \dots, p$). Riêng phần tử trên đường chéo chính của ma trận SPLOM biểu diễn sự phân phối của dữ liệu một chiều.

Phương pháp SPLOM biểu diễn mối liên hệ của tất cả các cặp thuộc tính của dữ liệu. Tuy nhiên ma trận SPLOM là ma trận đối xứng theo nghĩa các phần tử thứ (i, j) và (j, i) đều biểu diễn mỗi liên hệ giữa hai thuộc tính và đường chéo chính biểu diễn dữ liệu một chiều. Do đó ma trận SPLOM biểu diễn tất cả $\frac{p(p-1)}{2}$ mối liên hệ giữa các thuộc tính.



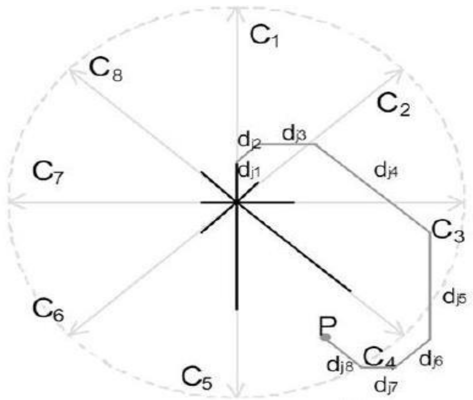
Hình 1: Phương pháp biểu diễn SPLOM

2.3. Hệ tọa độ hình sao

Hệ tọa độ hình sao (star coordinates) được giới thiệu bởi Eser Kandogan. Phương pháp hệ tọa độ hình sao là một phương pháp biểu diễn tuyến tính của dữ liệu hay phép chiếu tuyến tính của dữ liệu xuống không gian biểu diễn hai chiều. Tương tự như phương pháp biểu diễn một điểm trong hệ tọa độ đề-các Oxy biểu diễn điểm $M(x,y)$ bởi điểm: $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$, với $\boldsymbol{i} = (1,0), \boldsymbol{j} = (0,1)$ và điểm trong hệ tọa độ $Oxyz$ điểm $M(x,y,z)$ được biểu diễn bởi: $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, với $\boldsymbol{i} = (1,0,0), \boldsymbol{j} = (0,1,0), \boldsymbol{k} = (0,0,1)$.

Hệ tọa độ hình sao trong mặt phẳng Oxy thay thế hệ cơ sở chính tắc bởi một hệ véc-tơ gồm p véc-tơ trong không gian hai chiều: $V = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$. Mỗi véc-tơ được biểu diễn cho một thuộc tính tương ứng của dữ liệu và một điểm $M(x_1, x_2, \dots, x_p)$ được biểu diễn trong hệ tọa độ hình sao bới điểm

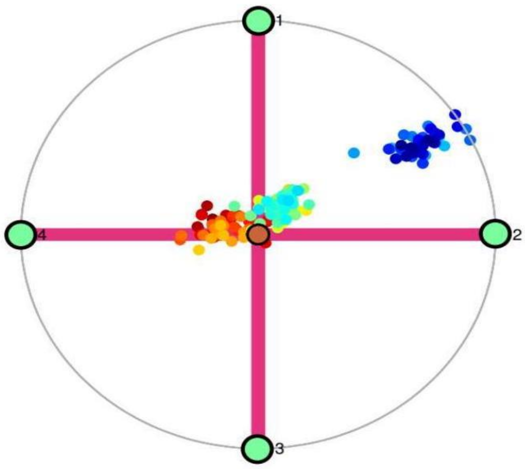
$$p = x_1V_1 + x_2V_2 + \dots + x_pV_p \qquad (1)$$



Hình 2: Phương pháp biểu diễn hệ tọa độ hình sao

Đối với hệ tọa độ hình sao là phương pháp chiếu dữ liệu từ không gian nhiều chiều xuống không gian thấp chiều nên sự biểu diễn. Hệ tọa độ hình sao đều được phân phối đều trên đường tròn đơn vị, nghĩa là các hệ véc-tơ $V = \{V_1, V_2, \dots, V_p\}$ được tính theo công thức sau:

$$V_i = \left(\cos\frac{2\pi(i-1)}{p}, \sin\frac{2\pi(i-1)}{p}\right), i = 1,2,\dots,p$$



Hình 3: Hệ tọa độ hình sao biểu diễn dữ liệu Iris.

2.4. Hệ tọa độ hướng tâm

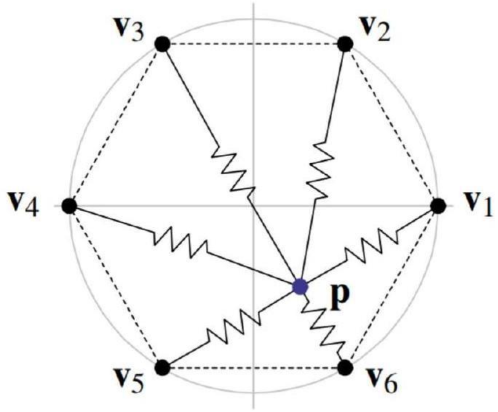
Hệ tọa độ hướng tâm (Radviz-radial visualization) là phương pháp chiếu phi tuyến của dữ liệu nhiều chiều xuống đường tròn đơn vị. Phương pháp Radviz được xây dựng từ hệ cân bằng lò xo dựa trên định luật Hooke. Giả sử các điểm dữ liệu được biến đổi trong đoạn $[0,1]$, một điểm trong không gian p chiều $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ với $x_i \in [0,1], i = 1,2,\dots,p$. Các số chiều của dữ liệu được biểu diễn bởi các điểm được phân phối đều trên đường tròn đơn vị $V_i = \left(\cos\frac{2\pi(i-1)}{p}, \sin\frac{2\pi(i-1)}{p}\right), i = 1,2,\dots,p$. Ta xây dựng một hệ gồm p lò xo có một đầu gắn vào các điểm treo V_i với độ cứng tương ứng là $x_i, i = 1,2,\dots,p$ và đầu còn lại được gắp vào một điểm $P(x,y)$ trong đường tròn đơn vị. Điểm $P(x,y)$ trong mặt phẳng được sử dụng như là điểm biểu diễn của điểm trong không gian nhiều chiều đó là điểm cân bằng của hệ lò xo. Điểm cân bằng $P(x,y)$ đối với hệ lò xo khi tổng hợp lực của hệ bằng 0 , nghĩa là:

$$\sum_{i=1}^{p} x_i(V_i - P) = 0$$

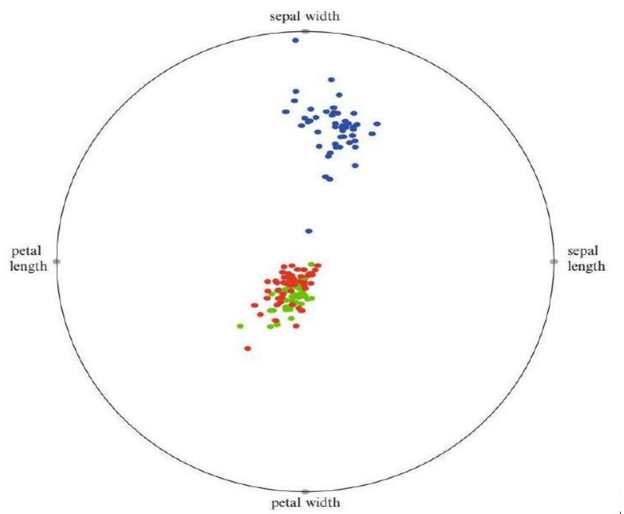
Do đó, điểm biểu diễn được tính theo công thức

$$P = \frac{1}{\sum_{i=1}^{p} x_i} \sum_{i=1}^{p} x_i V_i$$

Đối với hệ tọa độ hướng tâm, các thuộc tính có giá trị lớn thì điểm biểu diễn $P(x, y)$ sẽ được kéo gần với số chiều tương ứng. Một trong những hạn chế của hệ tọa độ hướng tâm là sự biểu diễn không duy nhất, đối với các điểm tỷ lệ với nhau thì điểm biểu diễn trùng nhau và khi các thuộc tính bằng nhau thì điểm biểu diễn nằm ở tâm đường tròn đơn vị.



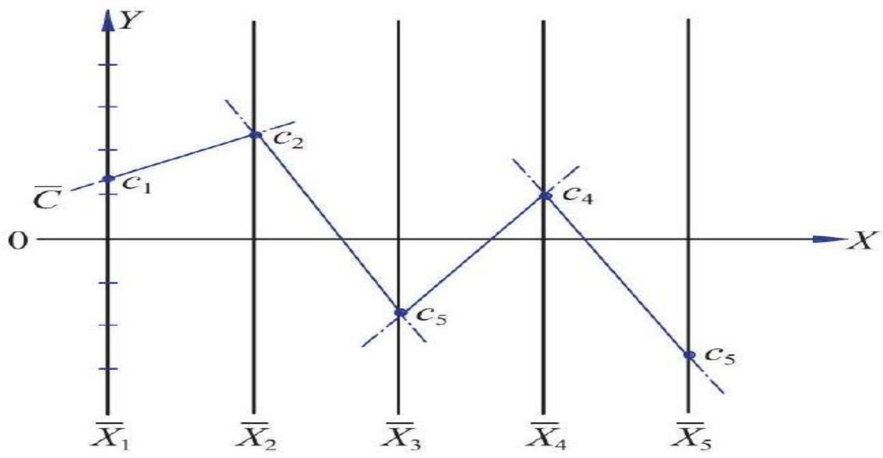
Hình 4: Hệ tọa độ hướng tâm



Hình 5: Hệ tọa độ hướng tâm biểu diễn dữ liệu Iris.

2.5. Hệ tọa độ song song

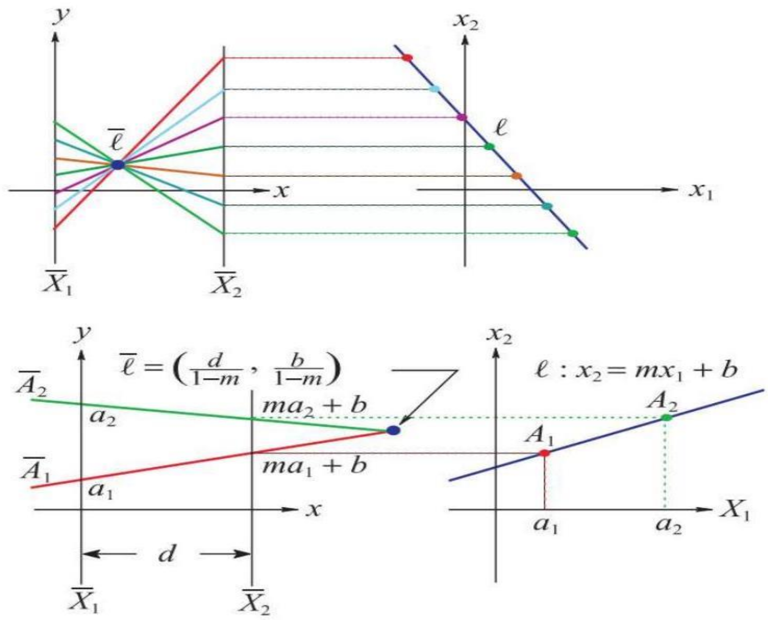
Hệ tọa độ song song (Parallel Coordinates) được đề xuất bởi Inselberg []. Khác với hệ toạ độ đề-các thông thường khi các trục được biểu diễn vuông góc thì hệ tọa độ song song được biểu diễn bởi các đường thẳng song song với trục tung Oy trong mặt phẳng hệ tọa độ Oxy. Để biểu diễn một điểm $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ trong không gian có p thuộc tính, ta xây dựng các đường thẳng $x = i - 1, i = 1,2, \dots, p$ trong mặt phẳng Oxy, ta xây dựng đường gấp khúc nối các điểm $(i, x_i), i = 1,2, \dots, p$ để biểu diễn cho điểm x. Sự biểu diễn này là duy nhất nghĩa là các thông tin biểu diễn được bảo toàn. Trong Hình 6 mô tả hệ tọa độ song song biểu diễn một điểm $C = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$ trong không gian có số chiều $p = 5$.



Hình 6: *Hệ tọa độ song song*

Tính chất đối ngẫu đường và điểm:

Đối với hệ tọa độ song song tính chất đối ngẫu giữa đường và điểm là một tính chất rất quan trọng. Xét hệ tọa độ đề-các vuông góc Ox_1x_2 với đường thẳng có phương trình $(\ell): x_2 = mx_1 + b$ khi đó các điểm trên đường thẳng này có dạng $(a, ma + b)$ được biểu diễn trong hệ tọa độ song song là đường thẳng nối hai điểm $A_1(0, a), A_2(1, ma + b)$ có phương trình là $y = (ma + b - a)x + a$. Khi thay đổi các giá trị tham số a các đường thẳng trên luôn luôn đi qua một điểm cố định có tọa độ là $(\bar{\ell})$: $\left(\frac{1}{1-m}, \frac{b}{1-m}\right)$. Điểm $(\bar{\ell})$ được gọi là điểm đối ngẫu của đường thẳng (ℓ).



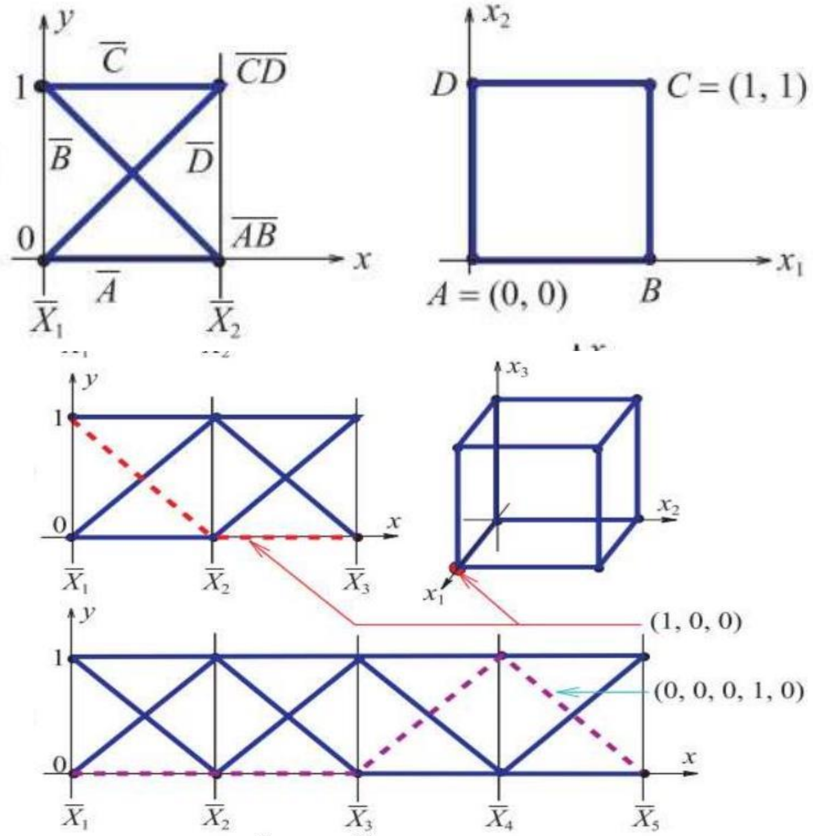
Hình 7: Tính chất đối ngẫu đường và điểm.

Các đối tượng hình học cơ bản như hình vuông đơn vị, hình lập phương đơn vị được biểu diễn như trong Hình 8 dưới đây. Một trong những điểm hạn chế của hệ tọa độ song song là sự chồng lấn lên nhau giữa các đường nối giữa các đoạn thẳng của hai hệ tọa độ song song liên tiếp.

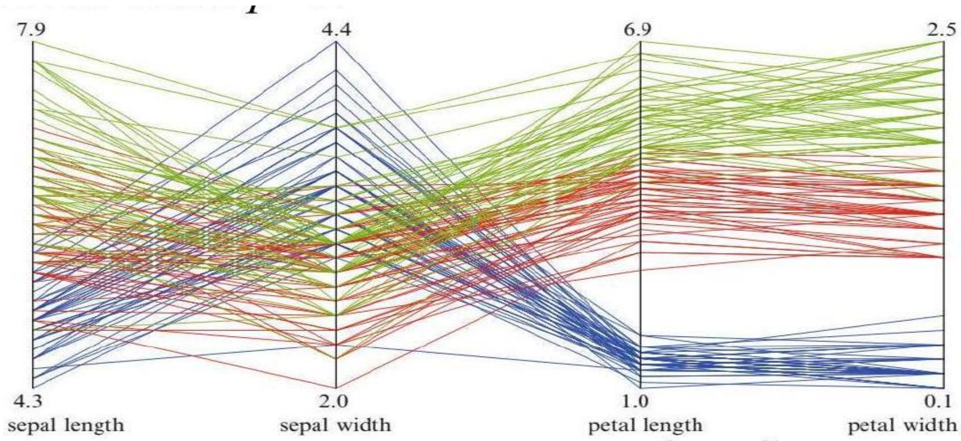
(a)

(b)

(c)



Hình 8: (a) Biểu diễn hình vuông đơn vị, (b) hình lập phương đơn vị, (c) Hình hộp đơn vị với số chiều $p = 5$.



Hình 9: Hệ tọa độ song song biểu diễn dữ liệu Iris.

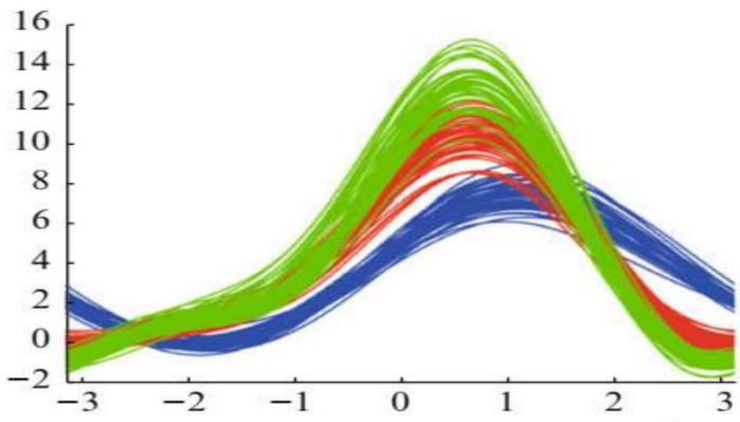
2.6. Đường cong Andrews

Một phương pháp khác để biểu diễn dữ liệu nhiều chiều là sử dụng phương pháp biến đổi dữ liệu nhiều chiều thành các hàm một biến đối với một hệ cơ sở trực chuẩn phù hợp. Phương pháp sử dụng đường cong Andrews sử dụng hệ hàm cơ sở lượng giác $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \ldots\right\}$.

Mỗi điểm $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ trong không gian có số chiều là p được biến đổi tương ứng thành hàm

$$f_x(t) = \frac{x_1}{\sqrt{2}} + x_2 \cos t + x_3 \sin t + \cdots$$

và được biểu diễn trên một chu kỳ $[-\pi, \pi]$.



Hình 10: Đường cong Andrews biểu diễn dữ liệu Iris.

Đối với các phép biến đổi Andrews có một số tính chất cơ bản như:

Tính chất trung bình: Hàm tương ứng của giá trị trung bình là giá trị trung bình của các hàm tương ứng nghĩa là:

$$f_{\bar{x}}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(t)$$

Bảo toàn khoảng cách: Khoảng cách giữa hai hàm là khoảng cách đối với chuẩn $L_2[-\pi,\pi]$ được xác định bởi công thức:

$$||f_x(t) - f_y(t)|_{L_2}^2 = \int_{-\pi}^{\pi} [f_x(t) - f_y(t)]^2 dt$$

tỷ lệ với khoảng cách Euclid giữa hai điểm. Cụ thể ta luôn có:

$$||f_x(t) - f_y(t)|_{L_2}^2 = \pi||x - y||^2$$

Tính chất tuyến tính: Nếu điểm $\mathbf{z}$ nằm giữa $\mathbf{x}$ và $\mathbf{y}$ thì các hàm tương ứng $f_z(t)$ cũng nằm giữa $f_x(t)$ và $f_y(t)$.

3. Một số bài toán

Bài toán hoán vị: Đối với các phương pháp biểu diễn của hệ toạ độ hình sao, hệ tọa độ hướng tâm, hệ toạ độ song song việc thay thứ tự các thuộc tính sẽ ảnh hưởng đến sự biểu diễn dữ liệu tổng thể. Để bảo toàn cấu trúc của dữ liệu nào đó chúng ta cần xác định một hoán vị của dữ liệu để thể hiện cấu trúc của dữ liệu tương ứng.

Bài toán tối ưu: Đối với hệ tọa độ hình sao là phép biến đổi tuyến tính do đó việc xác định hệ véc-tơ đối với dữ liệu cụ thể được lựa chọn sao cho cấu trúc của dữ liệu được bảo toàn. Chẳng hạn đối với dữ liệu không có nhãn thì ban đầu ta cần áp dụng phương pháp phân tích thành phần chính và đối với dữ liệu có nhãn thì ta cần áp dụng phương pháp phân tích phân biệt để xác định hệ tọa độ hình sao tối ưu.

Bài toán mở rộng: Đối với mỗi phương pháp biểu diễn các nhà nghiên cứu các phương pháp mở rộng chẳng hạn: hệ tọa độ hình sao mở rộng sang không gian ba chiều; hệ tọa độ hướng tâm thay vì biểu diễn bởi các điểm thì mỗi thuộc tính thay bởi một đoạn thẳng, một đường cong; đối với hệ tọa độ song song thay vì các đường gấp khúc ta thay bởi các đường cong nội suy; đối với phương pháp đường cong Andrews ta thay bởi các hệ hàm trực giao khác nhau.

4. Kết luận

Bài báo giới thiệu một số phương pháp trực tiếp biểu diễn dữ liệu nhiều chiều gồm phương pháp SPLOM, hệ tọa độ hình sao, hệ tọa độ hướng tâm, hệ tọa độ song song, đường cong Andrews và một số các tính chất tương ứng của các phương pháp. Đối với mỗi phương pháp biểu diễn đều có các điểm mạnh và điểm yếu khác nhau. Bài báo cũng trình bày một số bài toán đối với các phương pháp biểu diễn dữ liệu và được ứng dụng đối với một số lớp bài toán phân tích dữ liệu.

5. Tài liệu tham khảo

[1] S. Liu, D. Maliovec, B. Wang, P. T. Bremer, V. Pascucci: "Visualizing highdimensioal data: Advanes in the past decade", *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, Vol. 23, No. 3, p. 1249-1268, 2017.

[2] E. Kandogan, "Star coordinates: A multi-dimensional visualization technique with uniform treatment of dimensions," *Proceedings of the IEEE Information Visualization Symposium, Hot Topics*. IEEE, 2000, pp. 4-8.

[3] E. Kandogan, "Visualizing multi-dimensional clusters, trends, and outliers using star coordinates," in *Proceedings of the Seventh ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 2001, KDD' 01* .ACM, 2001, pp. 107116 .

[4] Y. Wang, J. Li, F. Nie, H. Theisel, M. Gong, and D. Lehmann, "Linear discriminative star coordinates for exploring class and cluster separation of high dimensional data," *Computer Graphics Forum*, vol. 36, pp. 401-410, 072017.

[5] P. Hoffman, G. Grinstein, K. Marx, I. Grosse, and E. Stanley, *"DNA visual and analytic data mining," in Proceedings of the 8th conference on Visualization'97*, IEEE Computer Society Press, 1997, pp. 437-441.

[6] M. Rubio-Sánchez, L. Raya, F. Diaz, and A. Sanchez, "A comparative study between radviz and coordinates,*" IEEE transactions on visualization and computer graphics*, vol. 22, no.1, pp. 619-628, 2016.

[7] G. Leban, B. Zupan, G. Vidmar, and I. Bratko,"VizRank: Data visualization guided by machine learning," *Data Mining and Knowledge Discovery*, vol. 13, no. 2, pp. 119136,2006

[8] V. L. Tran, "ArcViz: An extended radial visualization for classes separation of high dimensional data," in *The 10th International Conferenceon Knowledge and Systems Engineering (KSE2018)*, 2018, pp. 158-162.

[9] J. F. Mccarthy, K. A. Marx, P. E. Hoffman, A. G. Gee, P. O'neil, M. L. Ujwal, and J. Hotchkiss, "Applications of machine learning nd highdimensional visualization in cancer detection, diagnosis and management," *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 1020, no. 1, pp. 239-262, 2004.

[10] A. Inselberg, "The plane with parallel coordinates", Vis. Comput. 1 (2), 69-91, 1985.

[11] J A. Inselberg, Parallel coordinates: Visual Multidimensional Geometry and Its Applications, Springer, 2009.

[12] D. F. Andrews, "Plot of High-dimensional Data", Biometrics, 28 (1), p.125-126.

ASYMPTOTIC PERIODIC SOLUTIONS OF NON-DENSELY DEFINED NONAUTONOMOUS EVOLUTION EQUATIONS

TS. Lê Anh Minh [1]
[1] Khoa Toán, Trường Đại học Hồng Đức
Email: leanhminh@hdu.edu.vn

Abstract: In this paper, for the bounded solution of the non-densely defined nonautonomous evolution equation, we present the conditions for asymptotic periodicity by using the spectral theory of functions on the half line and the extrapolation theory of nondensely defined evolution equation.

1. INTRODUCTION

Studying the periodicity of solutions is one of the great problems for the qualitative theory of evolution equations. The existence and uniqueness of periodic solutions have been proved for several important classes of densely defined evolution equations by using classical approaches such as the fixed point method [10, 19, 22], the use of ultimate boundedness of solutions and the compactness of Poincaré map over compact embedding [17,18,20], the spectral theory of functions [11,15,16], ergodic approach [14]. As indicated in [6], we sometimes need to deal with non-densely defined operators. For example, when we look at a one-dimensional heat equation with Dirichlet conditions on $[0,\pi]$ and consider $A=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ in $C([0,\pi],\mathbb{R})$, in order to measure the solutions in the sup-norm, then the domain

$$\mathcal{D}(A)=\{u\in C^2([0,\pi],\mathbb{R}): u(0)=u(\pi)=0\}$$

is not dense in $C([0,\pi],\mathbb{R})$ with the sup-norm since

$$\overline{\mathcal{D}(A)}=\{u\in C([0,\pi],\mathbb{R}): u(0)=u(\pi)=0\}\neq C([0,\pi],\mathbb{R})$$

Many results on the existence and uniqueness of periodic solutions of nondensely defined evolution equations are obtained [7, 8, 1, 10]. Especially, in [9] K. Ezzinbi and M. Jazar gave a new criterion related to Massera's approach which is more general than the known exponential dichotomy for the existence of periodic and almost periodic solutions for some evolution equations in a Banach space of the form

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x(t)=(A+B(t))x(t)+f(t), \text{ for } t\geq 0\\ x(0)=x_0\end{cases}\tag{1.1}$$

where $A:\mathcal{D}(A)\subset X\to X$ is a nondensely defined linear operator on a Banach space X which satisfies the Hille - Yosida condition: $(\mathbf{M}_1)$: there exist $M_0\geq 1$ and $\omega_0\in\mathbb{R}$ such that $(\omega_0,+\infty)\subset\rho(A)$ and

$$|R(\xi,A)^n|\leq\frac{M_0}{(\xi-\omega_0)^n}, \text{ for } n\in\mathbb{N} \text{ and } \xi>\omega_0$$

where $\rho(A)$ is the resolvent set of A and $R(\xi,A)=(\xi-A)^{-1}$; the function $f:\mathbb{R}^+\to X$ is bounded continuous, 1-periodic or almost periodic (f is not identically zero); for every $t\geq 0, B(t)$ is a bounded linear operator on X.

Recently, in [4], Luong et al studied the densely defined case of Eq. (1.1) when $A(t) := A + B(t)$ generates a 1-periodic strongly continuous evolutionary process $(U(t,s))_{t\ge s\ge 0}$ defined on the whole space X and f is asymptotic 1-periodic in the sense that f is bounded, continuous and $\lim_{t\to\infty}(f(t+1) - f(t)) = 0$. (see e.g. [2] and its references). We recall that a function $x(\cdot)$ is an asymptotic solution to Eq.(1.1) if there is a continuous function $\epsilon(\cdot)$ such that $\lim_{t\to\infty}\epsilon(t) = 0$ and

$$x'(t) = (A + B(t))x(t) + f(t) + \epsilon(t),\ \forall t \ge 0$$

By using the spectral theory of functions on the half line and the induced evolution semigroups in various spectral function spaces. Luong et al introduced the new condition for the unique existence bounded solution to be asymptotic 1-periodic on the half line. More precisely, they showed that a bounded and continuous function $g: \mathbb{R} \to X$ is asymptotic 1-periodic if and only if its circular spectrum $\sigma(g)$ (see [11] for more detail of this notion) satisfies $\sigma(\mathrm{g}) \subset \{1\}$. Therefore, the existence of asymptotic 1 periodic solutions is reduced to that of solutions $x(\cdot)$ such that $\sigma(x(\cdot)) \subset \{1\}$. The search for asymptotic solutions $x(\cdot)$ with $\sigma(x(\cdot)) \subset \{1\}$ can be done by using the evolution semigroup associated with the homogeneous equations $x'(t) = A(t)x(t)$ in appropriate function spaces. In the case that the operator A is not densely defined, the linear part $A + B(t)$ does not generates a strongly continuous evolutionary process on the whole space X, so the results obtained in [4] are not guaranteed. Moreover, the inhomogeneous part $f(\cdot)$ taking value in the whole space X while the values of mild solution $x(\cdot)$ is exactly in $X_0 = \overline{D(A)}$. To overcome these difficulties, in this paper we first use the theory of extrapolation spaces to express the mild solution of Eq. (1.1) in terms of an evolution process $(\mathcal{U}_B(t,s))_{t\ge s>0}$ defined on closed subspace X_0 (see [1] and the references therein for more detail). Then, by using the periodicity and boundedness of $(\mathcal{U}_B(t,s)\,)$ combined with the circular spectrum of functions we state the conditions for the unique bounded solution of (1.1) to be asymptotic periodic which fit the case of densely defined of non-autonomous linear part.

Before concluding this introduction section we give an outline of the paper. We briefly list the main notations in Section 2. This section also contains the definitions as well as properties of circular spectra of functions on the half line and extrapolation spaces. Section 3 contains the main result of the paper that deals with the asymptotic periodicity of solutions to non-densely defined nonautonomous evolution equations of the form (1.1).

2. PRELIMINARIES

2.1. Notations. In this paper $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+$ and $\mathbb{C}$ stand for the real line, its positive half line, and the complex plane. If X denotes a (complex) Banach space, then $\mathcal{L}(X)$ stands for the space of all bounded linear operators in X. The spectrum of a linear operator T in a Banach space is denoted by $\sigma(T)$, and $\rho(T) := \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. We denote by $BC(\mathbb{R}^+, X)$ the space of all bounded continuous functions from $\mathbb{R}^+$ to a Banach space X with supremum norm, and $C_0(\mathbb{R}^+, X)$ is the space $\{g \in BC(\mathbb{R}^+, X): \lim_{t\to\infty} g(t) = 0\}$. Finally, Γ will stand for the unit circle $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$.

2.2. Circular spectra of functions on the half line. Many of the concepts and results in this subsection are discussed and proved in [4,5].

We consider the translation operator S in $BC(\mathbb{R}^+,X_0)$ defined as

$[Sx](\xi):=x(1+\xi),\ \xi\geq 0, x\in BC(\mathbb{R}^+,X_0)$

Furthermore, we also consider the quotient spaces

$Y:=BC(\mathbb{R}^+,X_0)/C_0(\mathbb{R}^+,X_0)$

Then, S induces operators in Y that will be denoted by $\bar{S}$. It is well known that $\bar{S}$ is an isometry, so $\sigma(\bar{S})\subset\Gamma$.

For each $x\in BC(\mathbb{R}^+,X_0)$ let us consider the complex function $[\mathcal{S}x](\lambda)$ in $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$ defined as

$[\mathcal{S}x](\lambda):=R(\lambda,\bar{S})\bar{x},\ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\Gamma$

Definition 2.2.1 ([5]). The circular spectrum of a function $x\in BC(\mathbb{R}^+,X_0)$ is defined to be the set of all $\xi_0\in\Gamma$ such that $[\mathcal{S}x](\lambda)$ has no analytic extension into any neighborhood of ξ_0 in the complex plane. This spectrum of x is denoted by $\sigma(x)$. We will denote by $\rho(x)$ the set $\Gamma\setminus\sigma(x)$.

The following lemma justifies the introduction of these concepts of spectra.

Lemma 2.2.2 ([5]). Let $x\in BC(\mathbb{R}^+,X_0)$. Then, for each $x\in BC(\mathbb{R}^+,X_0)$,

$\sigma(Qx)\subset\sigma(x)$

provided that Q is an operator in $BC(\mathbb{R}^+,X_0)$ that commutes with S and leaves $C_0(\mathbb{R}^+,X_0)$ invariant.

2.3. Mild solutions and extrapolation spaces. It is well known that (see [1] and the references therein) the part A_0 of A in X_0 generates a C_0-semigroup $(T_0(t))_{t\geq 0}$ on X_0 satisfying $\|T_0(t)\|\leq Me^{\omega t},\forall t\geq 0$. Moreover, for $\lambda\in\rho(A_0)$ the resolvent $R(\lambda,A_0)$ is the restriction of $R(\lambda,A)$ to X_0. On X_0 we introduce the norm $\|x\|_{-1}=\|R(\lambda_0,A_0)x\|$, where $\lambda_0\in\rho(A)$ is fixed. A different choice of $\lambda_0\in\rho(A)$ leads to an equivalent norm. The completion X_{-1} of X_0 with respect to $\|\cdot\|_{-1}$ is called the extrapolation space of X_0 with respect to A. The extrapolated semigroup $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ consists of the unique continuous extensions $T_{-1}(t)$ of the operators $T_0(t), t\geq\bar{0}$, to X_{-1}. The semigroup $(T_{-1}(t))_{t>0}$ is strongly continuous and its generator A_{-1} is the unique continuous extension of A_0 to $\mathcal{L}(X_0,X_{-1})$. Moreover, X is continuously embedded in X_{-1} and $R(\lambda,A_{-1})$ is the unique continuous extension of $R(\lambda,A)$ to X_{-1} for $\lambda\in\rho(A)$. Finally, A_0 and A are the parts of A_{-1} in X_0 and X, respectively.

We now give the definition of a mild solution of (1.1) as follows.

Definition 2.3.1. Let $x_0\in X_0$. A function $x\in C(\mathbb{R}^+,X_0)$ is called a mild solution to (1.1) if it satisfies the integral equation

$$x(t)=T_0(t-s)x(s)+\int_s^t T_{-1}(t-h)(B(h)x(h)+f(h))dh \qquad (2.1)$$

for all $t \geq s \geq 0$.

We consider the following homogeneous linear equation

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (A + B(t))x(t), t \geq 0 \\ x(0) = x_0 \in X_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

and assume that

$(\mathbf{M}_2)$: $t \mapsto B(t)x$ is strongly measurable for every $x \in X_0$,

$(\mathbf{M}_3)$: The operator $B(\cdot)$ is 1-periodic.

Proposition 2.3.2 ([1]). Let $(\mathbf{M}_1)$ - $(\mathbf{M}_3)$ be satisfied. Then, there exists a unique 1-periodic strongly continuous evolutionary process $(\mathcal{U}_B(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ that satisfies i) $\mathcal{U}_B(t,s) \in \mathcal{L}(X_0)$ for all $t \geq s \geq 0$;

ii) $\mathcal{U}_B(t,t) = I$, for every $t \in \mathbb{R}$;

iii) $\mathcal{U}_B(t,s)\mathcal{U}_B(s,r) = \mathcal{U}_B(t,r)$, for all $t \geq s \geq r$;

iv) $\mathcal{U}_B(t+1,s+1) = \mathcal{U}_B(t,s)$ for all $t \geq s \geq 0$;

v) The function $(t,s,x) \mapsto \mathcal{U}_B(t,s)x$ is continuous in (t,s,x);

vi) There are positive constants K, δ such that

$\|\mathcal{U}_B(t,s)\| \leq Ke^{\delta(t-s)}$, for all $t \geq s \geq 0$

vii) Furthermore,

$$\mathcal{U}_B(t,s)x = T_0(t-s)x + \int_s^t T_{-1}(t-h)B(h)\mathcal{U}_B(h,s)x dh, t \geq s \geq 0, x \in X_0$$

i.e., $t \mapsto \mathcal{U}_B(t,0)x_0$ is the unique solution of (2.2).

Theorem 2.3.3 ([1]). Let $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+, X)$ and $x_0 \in X_0$. Then there is a unique mild solution $x(\cdot) \in C(\mathbb{R}^+, X_0)$ of Eq. (1.1) which satisfies the integral equation

$$x(t) = \mathcal{U}_B(t,s)x(s) + \lim_{\xi\to\infty} \int_s^t \mathcal{U}_B(t,h)\xi R(\xi,A)f(h)dh \text{ for } t \geq s \geq 0$$

Moreover, $\lim_{\xi\to\infty} \int_s^t \mathcal{U}_B(t,h)\xi R(\xi,A)f(h)dh \in X_0$ exists uniformly for $t \geq s$ in compact sets in $\mathbb{R}$.

3. MAIN Results

3.1. Asymptotic periodic functions and their spectral characterization. We begin this subsection by recalling the concept of asymptotic periodic functions on the half line. It is noted that our definition of asymptotic periodicity is slightly different from the concept used in many previous works, and period 1 is not a restriction, but just for the reader's convenience. All results can be easily stated for the general case of period.

Definition 3.1.1 ([4]). A function $f \in BC(\mathbb{R}^+, X)$ is said to be asymptotic 1-periodic if

$$\lim_{t\to\infty} (f(t+1) - f(t)) = 0$$

Remark 3.1.2 ([4]). In [12] the authors considered the concept of asymptotic periodicity of functions in the sense of our Definition 3.1.1. However, there is an error when it is shown that this concept is equivalent to the following definition of asymptotic 1-periodicity that is widely used in the literature: f is asymptotic 1-periodic if and only if

$$f(t) = p(t) + q(t) \tag{3.1}$$

where p, q are continuous functions such that p is 1 -periodic and $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$. A counter-example and some sufficient conditions for the asymptotic periodicity in the sense of our Definition 3.1.1 are given in [13]. Below, we present a simpler counterexample.

Example 3.1.3. Let $f \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ defined as $f(t) := \sin\sqrt{t}, t \in \mathbb{R}^+$. Since $\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t+1} - \sqrt{t}) = 0$ we have

$$\lim_{t\to\infty}(f(t+1) - f(t)) = \lim_{t\to\infty}(\sin\sqrt{t+1} - \sin\sqrt{t}) = 0$$

If $f(t) = p(t) + q(t)$, where p is continuous and 1-periodic, $\lim_{t\to\infty} q(t) = 0$, then

$$f(n) = p(1) + q(n),\ n \in \mathbb{N}$$

Therefore, the following limit exists:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} \sin\sqrt{n} = p(1) \in \mathbb{R}$$

Substituting $n = k^2$ into the formula gives

$$\lim_{k\to\infty} \sin k = p(1) \in \mathbb{R}$$

An elementary argument shows that this is impossible. In fact, if that is true, then

$$\lim_{k\to\infty}(\sin(k+2) - \sin(k)) = 0$$

Consequently,

$$\lim_{k\to\infty} 2\sin(1)\cos(k+1) = 0$$

It follows that $\lim_{k\to\infty}\cos k = 0$. Arguing in the same way we can show that $\lim_{k\to\infty}\sin k = 0$. Therefore,

$$1 = \lim_{k\to\infty}(\cos^2 k + \sin^2 k) = 0$$

This is a contradiction that shows that $\lim_{k\to\infty}\sin k$ does not exist, and f cannot be expressed as (3.1).

Proposition 3.1.4 ([4]). The following assertions are valid:

i) Let $x \in BC(\mathbb{R}^+, X_0)$. Then, $\sigma(x) = \emptyset$ if and only if $x \in C_0(\mathbb{R}^+, X_0)$;

ii) Let $p \in \mathbb{R}$ and $x \in BC(\mathbb{R}^+, X_0)$. Then, $\sigma(x) \subset \{e^{ip}\}$ if and only if

$$\lim_{t\to\infty}\left(x(t+1) - e^{ip}x(t)\right) = 0$$

Lemma 3.1.5 ([4]). Assume that $Q(t), t \in \mathbb{R}^+$ is a family of bounded linear operators in X_0 that satisfies

(1) The function $\mathbb{R}^+ \times X_0 \ni (t, x) \mapsto Q(t)x \in X_0$ is continuous,

(2) $Q(t+1) = Q(t)$ for all $t \in \mathbb{R}^+$,

(3) $\sup_{0\le t\le 1} \| Q(t) \| < \infty$.

Then, for each $x(\cdot) \in BC(\mathbb{R}^+, X_0)$ we have

$\sigma(Qx(\cdot)) \subset \sigma(x(\cdot))$

where Q denotes the operator in $BC(\mathbb{R}^+, X_0)$ defined as

$[Qx(\cdot)](t) := Q(t)x(t), t \in \mathbb{R}^+$

3.2. Asymptotic periodic solution.

Definition 3.2.1. A function $x(\cdot) \in BC(\mathbb{R}^+, X_0)$ is said to be an asymptotic mild solution of Eq.(1.1) if there exists a function $\epsilon(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$ such that

$$x(t) = \mathcal{U}_B(t,s)x(s) + \lim_{\xi\to\infty}\int_s^t \mathcal{U}_B(t,h)\xi R(\xi,A)[f(h)+\epsilon(h)]dh \qquad (3.2)$$

for all $t \geq s \geq 0$.

Now, for T is an operator in a Banach space X_0, we denote $\sigma_\Gamma(T) := \sigma(T) \cap \Gamma$. We also recall the following well known result on the spectrum of the "monodromy" operators

$P(t) := \mathcal{U}_B(t+1, t)$

for each $t \geq 0$. When $t = 1$ we denote $P := P(1)$. In particular, $P = \mathcal{U}_B(1{,}0)$ if $(\mathcal{U}_B(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ is a 1-periodic process. Let us denote by $\mathcal{P}$ the operator of multiplication $u \mapsto \mathcal{P}u$ defined as

$$\mathcal{P}u(t) = P(t)u(t) \qquad (3.3)$$

Lemma 3.2.2. Let $(\mathcal{U}_B(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ be a 1-periodic process in X_0. Then, for each $t \geq 0$

$\sigma(P(t)) \setminus \{0\} = \sigma(P) \setminus \{0\}$

Proof. See [3, Lemma 7.2.2, p. 197].

The unique existence of asymptotic mild solution of Eq.(1.1) is implied from Theorem 2.3.3, by in fact that $f \in BC(\mathbb{R}^+, X) \subset L^1_{\text{loc}} BC(\mathbb{R}^+, X)$. Now we prove the relation between the spectral of asymptotic mild solution x with spectral of P and f.

Lemma 3.2.3. Let $x(\cdot) \in BC(\mathbb{R}^+, X_0)$ be an asymptotic mild solution of Eq. (1.1) and $f \in BC(\mathbb{R}^+, X)$. Then,

$$\sigma(x) \subset \sigma_\Gamma(P) \cup \sigma(f) \qquad (3.4)$$

Proof. By the definition of asymptotic mild solutions there is a function $\epsilon(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^+, X)$ such that, for each $t \in \mathbb{R}^+$

$$x(t+1) = \mathcal{U}_B(t+1,t)x(t) + \lim_{\xi\to\infty}\int_t^{t+1} \mathcal{U}_B(t+1,h)\xi R(\xi,A)(f(h)+\epsilon(h))dh \qquad (3.5)$$

For $\xi > \omega$ we set $f_\xi = \xi R(\xi, A)f$. Note that $\sigma(f_\xi) \subset \sigma(f)$ and $f_\xi \in BC(\mathbb{R}^+, X_0)$.

Let us denote

$F_\xi(t) := \int_t^{t+1} \mathcal{U}_B(t+1, h) f_\xi(h) dh$

Observe that the operator taking f_ξ to F_ξ commutes with S, and it is a bounded linear operator from $BC(\mathbb{R}^+, X_0)$ into itself, so by Lemma 3.1.5,

$\sigma(F_\xi) \subset \sigma(f_\xi)$

Moreover, $F_\xi \in BC(\mathbb{R}^+, X_0)$ and

$$F_\xi(t) \rightrightarrows F(t) := \lim_{\xi\to\infty} \int_t^{t+1} \mathcal{U}_B(t+1,h) f_\xi(h)dh \in X_0$$

which shows that

$$\sigma(F) \subset \sigma(F_\xi) \subset \sigma(f_\xi) \subset \sigma(f)$$

Also, if we denote

$$\varepsilon(t) = \lim_{\xi\to\infty} \int_t^{t+1} \mathcal{U}_B(t+1,h)\xi R(\xi,A)\epsilon(h)dh$$

then $\varepsilon(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^+, X_0)$. Hence, for the function

$$w(t) := \lim_{\xi\to\infty} \int_t^{t+1} \mathcal{U}_B(t+1,h)\xi R(\xi,A)(f(h)+\epsilon(h))dh = F(t) + \varepsilon(t)$$

we have

$$\sigma(w) = \sigma(F) \subset \sigma(f)$$

The periodicity of the evolution process $(\mathcal{U}_B(t,s))_{t\geq s}$ yields that $P(t)$ is 1-periodic, so it commutes with the translation S. Therefore, (3.5) gives

$$\bar{S}\bar{x} = \bar{\mathcal{P}}\bar{x} + \bar{F}$$

Let $0 \neq \lambda_0 \notin \sigma_\Gamma(P) \cup \sigma(f)$ and let V be a fixed small open neighborhood of λ_0 such that

$$V \cap (\sigma_\Gamma(P) \cup \sigma(f)) = \emptyset$$

Using the identity

$$R(\lambda,\bar{S})\bar{S}\bar{x} = \lambda R(\lambda,\bar{S})\bar{x} - \bar{x}, \quad \text{for } \lambda \in V: |\lambda| \neq 1$$

we have

$$R(\lambda,\bar{S})(\bar{\mathcal{P}}\bar{x} + \bar{F}) = R(\lambda,\bar{S})\bar{S}\bar{x} = \lambda R(\lambda,\bar{S})\bar{x} - \bar{x}$$

Together with the fact that $R(\lambda,\bar{S})\bar{\mathcal{P}}\bar{x} = \bar{\mathcal{P}}R(\lambda,\bar{S})\bar{x}$ we obtain

$$\begin{aligned}\bar{x} + R(\lambda,\bar{S})\bar{F} &= \lambda R(\lambda,\bar{S})\bar{x} - \bar{\mathcal{P}}R(\lambda,\bar{S})\bar{x} \\ &= (\lambda - \bar{\mathcal{P}})R(\lambda,\bar{S})\bar{x}\end{aligned}$$

Since $\lambda \in V$ the operator $\lambda - \bar{\mathcal{P}}$ is invertible and its inverse is determined by $R(\lambda,\bar{\mathcal{P}})$. Therefore, for all $\lambda \in V$ such that $|\lambda| \neq 1$ we have

$$R(\lambda,\bar{S})\bar{x} = R(\lambda,\bar{\mathcal{P}})(\bar{x} + R(\lambda,\bar{S})\bar{F})$$

Since $R(\lambda,\bar{\mathcal{P}})\bar{x}$ is analytic in V and $R(\lambda,\bar{S})\bar{F}$ is analytically extendable in a neighborhood of λ_0, the complex function $R(\lambda,\bar{S})\bar{x}$ is analytically extendable to a neighborhood of λ_0. That is $\lambda_0 \notin \sigma(x)$. This proves (3.4), completing the proof of the lemma.

Theorem 3.2.4. Let $(\mathbf{M}_1)$ - $(\mathbf{M}_3)$ are satisfied. Let $\sigma_\Gamma(P) \subset \{1\}$ and $x \in BC(\mathbb{R}^+, X_0)$ be an asymptotic mild solution of Eq. (1.1). Furthermore, let $f \in BC(\mathbb{R}^+, X)$ in Eq. (1.1) be asymptotic 1-periodic. Then, $x(\cdot)$ is asymptotic 1-periodic, i.e.,

$$\lim_{t\to\infty} (x(t+1) - x(t)) = 0$$

Proof. Since f is asymptotic 1-periodic,

$\sigma(f) \subset \{1\}$

By Lemma 3.2.3,

$\sigma(x) \subset \sigma_\Gamma(P) \cup \sigma(f) \subset \{1\}$

Then, by Proposition 3.1.4 we conclude that $x(\cdot)$ is asymptotic 1-periodic.

3.3. Example. To illustrate our results, we consider the following nondensely defined nonautonomous partial differential equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t}(t,\zeta) = \dfrac{\partial^2}{\partial \zeta^2} x(t,u) - b(t)x(t,\zeta) + g(\zeta)\cdot \sin\sqrt{t}, \text{ for } t \in \mathbb{R}_+ \text{ and } \zeta \in [0,\pi] \\ x(t,0) = x(t,\pi) = 0, \text{ for } t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{3.6}$$

where $b(\cdot)$ is a 1-periodic function which satisfies $0 < \bar{b} < b(\cdot)$ and g is L^2 -integrable on $[0,\pi]$.

We set $X := C([0,\pi],\mathbb{R})$, the Banach space of continuous functions on $[0,\pi]$, equipped with the uniform norm topology, and we define $A: \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ by

$$\begin{cases} D(A) = \{z \in C^2([0,\pi],\mathbb{R}) : z(0) = z(\pi) = 0\} \\ Az = z'' + z \end{cases}$$

We have $(0,\infty) \subset \rho(A)$,

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{1}{\lambda},\ \forall \lambda > 0$$

and

$X_0 := \overline{\mathcal{D}(A)} = \{y \in C([0,\pi],\mathbb{R}) : y(0) = y(\pi) = 0\} \neq X$

Hence, $(\mathbf{M}_1)$ is satisfied. We will use the fact that A generates a strongly continuous exponentially semigroup $(T_0(t))_{t\geq 0}$ on X_0 with

$\|T_0(t)\| \leq e^{-t},\ \forall t \geq 0$

Moreover, as in [21, p. 414] the eigenvalues of A on $i\mathbb{R}$ are determined from the set of solutions of the equations

$\lambda - 1 = -n^2, n = 1,2,\ldots$

Obviously, there is only one root $\lambda = 0$ that lies on $i\mathbb{R}$, so $\sigma(A) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$. Since this semigroup is compact, the spectral mapping theorem yields that $\sigma(T_0(1)) = e^{\sigma(A)} = \{1\}$.

We now consider the family $(B(t))_{t\geq 0}$ defined on X_0 by $B(t) = -b(t)I$, for every $t \geq 0$. Since $b(.) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+), t \mapsto B(t)x$ is strongly measurable. Hence, $(\mathbf{M}_2)$ is satisfied. Clearly that $B(\cdot)$ is 1-periodic so (M_3) is fulfilled. We find that $A + B(t)$ generates a unique 1-periodic strongly continuous evolutionary process $(\mathcal{U}_B(t,s))_{t\geq s\geq 0}$ on X_0 defined by

$$\mathcal{U}_B(t,s) = \exp\left(-\int_s^t b(\tau)d\tau\right) T_0(t-s)$$

For the monodromy operator $P = \mathcal{U}_B(1,0) = \exp\left(-\int_0^1 b(\tau)d\tau\right) T_0(1)$ we have

$\sigma_{\Gamma}(P) = \{1\}$

Furthermore, if we assume that $g \in X$, then the function $f(t) := \sin\sqrt{t} \cdot g(\cdot)$ is an asymptotic 1-periodic function taking values in X (see Example 3.1.3).

Therefore, by applying Theorem 3.2.4 we conclude that every asymptotic solution to Eq. (3.6) is asymptotic 1-periodic.

REFERENCES

1. Guhring F., Rabiger F., Asymptotic properties of mild solutions for nonautonomous evolution equations with applications to retarded differential equations, Journal of Abstract and Applied Analysis, Vol. 4, No 3, 169-194, (1999).
2. H.R. Henriquez, M. Pierri, P. Taboas, On S-asymptotically ω-periodic functions on Banach spaces and applications, J. Math. Anal. Appl., 343 (2008), 1119-1130.
3. D. Henry, "Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations", Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.
4. V.T. Luong, D. V. Loi, N. V. Minh and H. Matsunaga, A Massera theorem for asymptotic periodic solutions of periodic evolution equations, J. Differential Equations, 329 (2022), 371-394.
5. V. T. Luong, N. H. Tri, N. V. Minh, Asymptotic behavior of solutions of periodic linear partial functional differential equations on the half line, J. Differential Equations, 296 (2021), 1-14.
6. Ezzinbi, Khalil; Jazar, Mustapha New criteria for the existence of periodic and almost periodic solutions for some evolution equations in Banach spaces., Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2004, No. 6,12 pp.
7. Nguyen, Van Minh; N'Guerekata, Gaston; Siegmund, Stefan, Circular spectrum and bounded solutions of periodic evolution equations., J. Differential Equations 246 (2009), no. 8, 3089-3108.
8. Minh, Nguyen Van; Matsunaga, Hideaki; Huy, Nguyen Duc; Luong, Vu Trong A KatznelsonTzafriri type theorem for difference equations and applications, Proc. Amer. Math. Soc. 150 (2022), no. 3, 1105-1114
9. Burton T., Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Orlando, Florida: Academic Press; 1985.
10. Prüss, J. Periodic solutions of the thermostat problem. Differential equations in Banach spaces (Book's Chapter), 216-226 Lecture Notes in Math., vol. 1223. Springer, Berlin (1986)

SINH VIÊN SƯ PHẠM TOÁN - CƠ HỘI NGHỀ NGHIỆP VÀ NHỮNG THÁCH THỨC TRONG THỜI ĐẠI MỚI

ThS. Nguyễn Minh Ngọc [1]

[1] Hiệu trưởng trường THPT Quang Trung

Trong bối cảnh nền giáo dục ngày càng phát triển và các yêu cầu về chất lượng giáo dục ngày càng cao, vai trò của sinh viên Sư phạm Toán trở nên ngày càng quan trọng. Báo cáo này sẽ tập trung vào việc phân tích cơ hội việc làm mà sinh viên Sư phạm Toán có thể gặp phải sau khi tốt nghiệp, cũng như những thách thức mà họ có thể phải đối mặt trong tương lai.

I. Sinh viên Sư phạm Toán và các cơ hội nghề nghiệp

Sinh viên sư phạm Toán có nhiều cơ hội nghề nghiệp trong tương lai, không chỉ giới hạn trong việc giảng dạy tại các trường học. Dưới đây là một số ngành nghề mà sinh viên sư phạm Toán có thể theo đuổi sau khi tốt nghiệp, cùng với mô tả ngắn gọn về từng nghề:

1. Giáo viên Toán học

- Cấp tiểu học, trung học cơ sở và trung học phổ thông: Giảng dạy môn Toán tại các trường tiểu học, trung học cơ sở và trung học phổ thông. Điều này bao gồm việc lên kế hoạch bài giảng, chấm bài và hỗ trợ học sinh trong việc học tập.

- Trường chuyên, trường quốc tế: Giảng dạy tại các trường chuyên, trường quốc tế với mức độ yêu cầu cao hơn về kiến thức và kỹ năng sư phạm.

2. Giảng viên đại học và cao đẳng

- Giảng dạy và nghiên cứu: Làm việc tại các trường đại học và cao đẳng, tham gia giảng dạy các môn Toán cao cấp và thực hiện các dự án nghiên cứu trong lĩnh vực Toán học.

3. Chuyên viên tư vấn giáo dục

- Tư vấn học tập: Hỗ trợ học sinh, sinh viên trong việc lên kế hoạch học tập, lựa chọn môn học và phương pháp học tập hiệu quả.

- Phát triển chương trình giáo dục: Tham gia vào việc phát triển và cải tiến chương trình giáo dục, tài liệu giảng dạy và phương pháp đánh giá.

4. Chuyên viên phát triển phần mềm giáo dục

- Thiết kế phần mềm học Toán: Làm việc với các công ty phát triển phần mềm để thiết kế và xây dựng các ứng dụng, phần mềm và công cụ hỗ trợ việc học Toán.

- E-learning và giáo dục trực tuyến: Tham gia vào các dự án e-learning, phát triển nội dung và nền tảng học trực tuyến.

5. Nhà nghiên cứu Toán học

- Nghiên cứu lý thuyết và ứng dụng: Thực hiện nghiên cứu về các lý thuyết Toán học hoặc ứng dụng của Toán học trong các lĩnh vực khác như khoa học máy tính, vật lý, kinh tế học, và kỹ thuật.

- Làm việc tại các viện nghiên cứu: Làm việc tại các viện nghiên cứu hoặc trung tâm nghiên cứu Toán học.

6. Phân tích dữ liệu và khoa học dữ liệu

- Data Analyst và Data Scientist: Phân tích dữ liệu, xây dựng mô hình dự đoán và cung cấp các giải pháp dựa trên dữ liệu cho các doanh nghiệp và tổ chức.

- Machine Learning Engineer: Phát triển và triển khai các mô hình học máy, làm việc trong các dự án về trí tuệ nhân tạo và học máy.

7. Chuyên viên tài chính và bảo hiểm

- Actuary (Chuyên viên định phí bảo hiểm): Sử dụng Toán học và thống kê để phân tích rủi ro và định giá các sản phẩm bảo hiểm.

- Financial Analyst (Chuyên viên phân tích tài chính): Phân tích dữ liệu tài chính, xây dựng mô hình tài chính và cung cấp các dự báo tài chính.

8. Kỹ sư và chuyên viên khoa học máy tính

- Software Engineer: Phát triển phần mềm, ứng dụng và hệ thống sử dụng các kỹ thuật Toán học.

- Algorithm Developer: Thiết kế và tối ưu hóa các thuật toán cho các ứng dụng trong khoa học máy tính và kỹ thuật.

9. Giáo viên luyện thi và gia sư

- Luyện thi đại học: Dạy các lớp luyện thi đại học, giúp học sinh chuẩn bị cho các kỳ thi quan trọng.

- Gia sư Toán: Cung cấp dịch vụ gia sư cá nhân hoặc nhóm nhỏ cho học sinh ở nhiều cấp học khác nhau.

10. Khởi nghiệp trong giáo dục

- Thành lập trung tâm học tập: Mở các trung tâm học tập và dạy kèm, cung cấp các khóa học bổ trợ cho học sinh.

- Phát triển nội dung giáo dục: Viết sách, tài liệu học tập hoặc tạo ra các khóa học trực tuyến.

Sinh viên sư phạm Toán, với nền tảng kiến thức vững chắc và kỹ năng sư phạm, có thể linh hoạt theo đuổi nhiều ngành nghề khác nhau tùy theo sở thích và mục tiêu nghề nghiệp của mình. Sự đa dạng trong các cơ hội nghề nghiệp này không chỉ giúp họ phát huy khả năng của mình mà còn góp phần nâng cao chất lượng giáo dục và nghiên cứu trong lĩnh vực Toán học.

II. Những thách thức khi tìm kiếm cơ hội việc làm

Sinh viên sư phạm Toán có thể gặp phải một số thách thức và khó khăn khi tìm kiếm cơ hội việc làm sau khi tốt nghiệp. Dưới đây là một số thách thức chính cùng với gợi ý về cách vượt qua chúng:

1. Cạnh tranh cao

- Thách thức: Có nhiều sinh viên tốt nghiệp từ các chương trình sư phạm Toán, dẫn đến sự cạnh tranh cao trong việc tìm kiếm công việc giảng dạy.

- Giải pháp: Tập trung vào việc nâng cao kỹ năng chuyên môn và sư phạm, tham gia các khóa học bổ sung và chứng chỉ nâng cao để tăng tính cạnh tranh. Ngoài ra, xây dựng mạng lưới quan hệ trong ngành giáo dục thông qua thực tập, các hội thảo và sự kiện nghề nghiệp.

2. Yêu cầu kinh nghiệm làm việc

- Thách thức: Nhiều nhà tuyển dụng yêu cầu ứng viên có kinh nghiệm làm việc, điều mà sinh viên mới tốt nghiệp thường thiếu.

- Giải pháp: Tìm kiếm cơ hội thực tập, làm trợ giảng hoặc tham gia các dự án tình nguyện liên quan đến giáo dục trong quá trình học để tích lũy kinh nghiệm thực tế.

3. Thay đổi trong chính sách giáo dục

- Thách thức: Sự thay đổi trong chính sách giáo dục có thể ảnh hưởng đến nhu cầu tuyển dụng giáo viên Toán.

- Giải pháp: Luôn cập nhật và tìm hiểu về các chính sách giáo dục mới, điều chỉnh và phát triển kỹ năng để phù hợp với các yêu cầu mới của ngành.

4. Kỹ năng mềm chưa đủ mạnh

- Thách thức: Kỹ năng giao tiếp, quản lý lớp học và giải quyết xung đột có thể chưa được phát triển đầy đủ.

- Giải pháp: Tham gia các khóa học phát triển kỹ năng mềm, tham gia vào các hoạt động ngoại khóa và các khóa huấn luyện kỹ năng quản lý lớp học.

5. Công nghệ trong giáo dục

- Thách thức: Sự phát triển nhanh chóng của công nghệ trong giáo dục yêu cầu giáo viên phải có khả năng sử dụng các công cụ và phần mềm giáo dục hiện đại.

- Giải pháp: Học cách sử dụng các công cụ công nghệ và tham gia các khóa đào tạo về công nghệ giáo dục. Áp dụng công nghệ vào giảng dạy để nâng cao hiệu quả dạy học.

6. Thiếu định hướng nghề nghiệp rõ ràng

- Thách thức: Một số sinh viên có thể thiếu định hướng nghề nghiệp rõ ràng sau khi tốt nghiệp.

- Giải pháp: Tìm kiếm sự tư vấn từ các cố vấn nghề nghiệp, tham gia các buổi hội thảo định hướng nghề nghiệp và các chương trình mentoring để xác định mục tiêu nghề nghiệp cụ thể.

7. Lương và phúc lợi

- Thách thức: Mức lương và phúc lợi trong ngành giáo dục có thể không hấp dẫn so với các ngành nghề khác.

- Giải pháp: Tìm hiểu về các cơ hội nghề nghiệp khác liên quan đến Toán học ngoài giảng dạy như phân tích dữ liệu, phát triển phần mềm giáo dục hoặc tư vấn giáo dục, nơi có thể có mức lương và phúc lợi tốt hơn.

8. Di chuyển và địa điểm làm việc

- Thách thức: Cơ hội việc làm có thể không đồng đều giữa các khu vực, đòi hỏi sinh viên phải di chuyển đến các thành phố hoặc vùng khác.

- Giải pháp: Sẵn sàng di chuyển và linh hoạt trong việc lựa chọn địa điểm làm việc. Cân nhắc việc bắt đầu sự nghiệp tại các khu vực có nhu cầu cao và sau đó tìm cơ hội chuyển về nơi mong muốn.

9. Chuyển đổi giữa các cấp học

- Thách thức: Việc chuyển đổi giảng dạy giữa các cấp học (tiểu học, trung học cơ sở, trung học phổ thông) có thể gặp khó khăn do yêu cầu khác nhau.

- Giải pháp: Nắm vững kiến thức và kỹ năng giảng dạy phù hợp với từng cấp học, và tham gia các khóa đào tạo chuyên sâu để làm quen với các yêu cầu cụ thể của từng cấp.

Kết luận

Trong báo cáo này, chúng ta đã đi qua một hành trình khám phá về cơ hội việc làm và những thách thức mà sinh viên Sư phạm Toán có thể gặp phải trong tương lai. Từ việc phân tích các ngành nghề có liên quan đến Toán học đến việc đặt ra các giải pháp cho các thách thức tuyển dụng và phát triển nghề nghiệp, chúng ta đã thấy rõ sự quan trọng và đa dạng của lĩnh vực này.

Các sinh viên Sư phạm Toán không chỉ là những người giảng dạy môn Toán tại các trường học, mà còn là những chuyên gia có thể đóng góp vào nhiều lĩnh vực khác nhau như nghiên cứu, phân tích dữ liệu, phát triển phần mềm giáo dục và nhiều hơn nữa. Tuy nhiên, họ cũng đối diện với nhiều thách thức, từ sự cạnh tranh cao đến yêu cầu kỹ năng mềm và kỹ năng công nghệ ngày càng cao.

Để vượt qua những thách thức này, sinh viên Sư phạm Toán cần liên tục nâng cao kỹ năng chuyên môn và sư phạm, cũng như phát triển kỹ năng mềm và làm quen với công nghệ mới. Đồng thời, việc tìm kiếm sự hỗ trợ từ cố vấn nghề nghiệp và tham gia vào các hoạt động ngoại khóa cũng rất quan trọng để xây dựng hành trình nghề nghiệp thành công.

Dù có những thách thức, nhưng không có gì là không thể với sự nỗ lực và kiên trì. Các sinh viên Sư phạm Toán có một tương lai sáng láng và đầy tiềm năng trong một thế giới mà Toán học ngày càng trở nên quan trọng và cần thiết hơn bao giờ hết. Hãy tiếp tục đam mê và không ngừng học hỏi, bởi chỉ có như vậy, chúng ta mới có thể thực sự khám phá được tiềm năng của mình và đóng góp vào sự phát triển của xã hội và nhân loại./

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Dianne Siemon, Kathy Beswick, Julie Clark, *Teaching Mathematics: Foundations to Middle Years*, Oxford University Press, 2015.

[2]. Jo Boaler, *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*", Wiley, 2015.

[3].Anna Lee, *Challenges and Opportunities for Mathematics Education Graduates*, International Journal of Educational Research, 2019.

SPECTRAL CRITERIA FOR THE ASYMPTOTIC CONSTANCY OF SOLUTIONS TO IMPLICIT DIFFERENCE EQUATIONS

TS. Bùi Xuân Quang [1]

[1] Khoa Cơ bản, Trường Đại học Phenikaa

Abstract: This paper deals with spectral criteria for the asymptotic constancy of solutions to the implicit difference equation $Cx(n+1) = Tx(n) + y(n)$ in a Banach space $\mathbb{X}$, where the bounded sequence $\{y(n)\}_n$ is asymptotically constant. The main result states that, if 1 is either not in $\sigma_\Gamma(C,T)$, or is its isolated element, then the implicit difference equation has an asymptotic solution that is asymptotically constant, provided it has a bounded asymptotic solution. In the case of $\sigma_\Gamma(C,T) \subset \{1\}$ we prove that every asymptotic solution is asymptotically constant. Furthermore, we give an application of the result to periodic evolution equations associated with C-semigroups.

1. INTRODUCTION

In this paper, we study the asymptotic behavior of the implicit difference equation

$$Cx(n+1) = Tx(n) + y(n),\ n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

where $x(n) \in \mathbb{X}, \mathbb{X}$ is a Banach space, T is a bounded linear operator acting in $\mathbb{X}$, C is an injective operator in $\mathcal{L}(\mathbb{X})$, and $y(n) \in \mathbb{X}$ is a bounded asymptotically constant sequence in $\mathbb{X}$.

Historically, Katznelson-Tzafriri 11 studied the asymptotic behavior of the sequence $\{T^n\}_n$, where T is a power bounded operator in a Banach space $\mathbb{X}$, that is, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\| < \infty$. A famous result of that paper is the following theorem:

Theorem A (Katznelson-Tzafriri 11, Theorem 1]). Let T be a linear contraction on a Banach space $\mathbb{X}$. Then,

$$\lim_{n\to\infty} (T^{n+1} - T^n) = 0 \text{ if (and only if) } \sigma_\Gamma(T) \subset \{1\}$$

We can refer to Vu [27] for a short proof of the Theorem A, see also 1, 15, 17, 26] for discussions related to this result. Recent developments related to Theorem A can be found in [2, 3, 4, 7, 16, 23, 28. Theorem A can be expressed as the spectral criterion for all solutions to the homogeneous equation $x(n+1) = Tx(n)$ to be asymptotically constant.

For the case of explicit difference equation

$$x(n+1) = Tx(n) + y(n),\ n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

that is, implicit difference equation (1) in the case of C is the identity operator I, by using the spectral decomposition technique in [8, 20, Minh-Matsunaga-HuyLuong 17] proved in 2022 that if $\sigma_\Gamma(C,T) \subset \{1\}$ and $\{y(n)\}_n$ is asymptotically constant, then every bounded solution of $\sqrt{2}$ is asymptotically constant. Furthermore, Minh-Matsunaga-Huy-Luong [17] introduced the concept of asymptotic solution (see Definition 3.3 to study the case when the condition $\sigma_\Gamma(T) \subset \{1\}$ may not hold. The result states that if 1 is either not in $\sigma_\Gamma(T)$, or is an isolated point of $\sigma_\Gamma(T)$, then $\sqrt{2}$ has an asymptotic solution that is asymptotically constant, provided it has a bounded solution (see Theorem 3.8). A result of this type is often referred to as a Massera-type theorem. Such results play a very important role in studying the periodicity of differential and difference equations. The reader is referred to [6, 8, 12, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 29, 32, see also 10, 13, 17, 24, 25, for more recent developments.

The aims of this paper are to extend the methods and results of Minh-MatsunagaHuy-Luong 17 to the case of implicit difference equation (1) and to further study the relationship of the spectrum of a bounded sequence and spectrum of a bounded asymptotic solution (see the first inclusion in Lemma 3.4. More specifically, we will give a spectral criterion for the asymptotic constancy of solutions to implicit difference equation (17. Our technique is to use the spectral definition of the sequences in Definition 2.1 to establish the desired criterion. Hence, the main difficulty when transitioning to the case of implicit difference equation is proving the analyticity of the function $\rho(C,T) \ni \lambda \mapsto R(\lambda,C,T) := (\lambda C - T)^{-1}$. This difficulty is resolved in Lemma 3.2 which gives the openness of the resolvent set $\rho(C,T)$ in the complex plane and the analyticity of the function $\lambda \mapsto R(\lambda,C,T)$ on the resolvent set.

With Lemma 3.2, our main results are contained in Lemma 3.4. Theorem 3.6. Theorem 3.7. Theorem 3.8, and Theorem 4.3. We also prove that the spectrum of a bounded sequence is a subset of the spectrum of a bounded asymptotic solution, see inclusion " $\sigma(y) \subset \sigma(x)$ " in Lemma 3.4. Note that, the result " $\sigma(x) \subset \sigma(y) \cup \sigma_\Gamma(C,T)$ " in Lemma 3.4 is analogous to Naito-Minh-Shin 20, Lemma 3.2] for the implicit difference equations, see Remark 3.5 .

This paper is organized as follows: In Section 2, we first list some notations used in the paper. Then, we recall some background materials on spectral theory. Section 3 contains the main results, which begins with Lemma 3.2 on the analyticity of the resolvent $R(\lambda,C,T) := (\lambda C - T)^{-1}$. Using Lemma 3.4, we describe a necessary condition for implicit difference equation (1) to have an asymptotic constant solution in Theorem 3.6. A spectral criterion for any bounded asymptotic solution to be asymptotically constant is stated in Theorem 3.7. Theorem 3.8 builds a spectral criterion to infer the existence of asymptotically constant from the existence of a bounded asymptotic solution. Finally, Section 4 discusses an application to periodic evolution equations associated with C-semigroups.

2. PRELIMINARIES

Notations. For a complex Banach space $\mathbb{X}$, the space of all bounded linear operators acting in $\mathbb{X}$ is denoted by $\mathcal{L}(\mathbb{X})$; $\rho(C,T)$ and $\sigma(C,T)$ denote the resolvent set and spectrum of linear operator pencil $\{C,T\}$, respectively. For $\lambda \in \rho(C,T)$, we denote $R(\lambda,C,T) := (\lambda C - T)^{-1}$. A sequence in $\mathbb{X}$ will be denoted by $\{x(n)\}_n$.

Consider the Banach spaces of sequences

$$l^\infty(\mathbb{X}) := \left\{x = \{x(n)\}_n \subset \mathbb{X} : \sup_{n\in\mathbb{N}} \| x(n) \| < \infty \right\} \tag{3}$$

and

$$c_0(\mathbb{X}) := \left\{x = \{x(n)\}_n \subset \mathbb{X} : \lim_{n\to\infty} x(n) = 0 \right\} \tag{4}$$

are equipped with sup-norm, $\| x \| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \| x(n) \|$. The shift operator S acts in $l^\infty(\mathbb{X})$ as

$$Sx(n) = x(n+1),\ n \in \mathbb{N},\ x \in l^\infty(\mathbb{X})$$

The operator S is a contraction (see Minh-Matsunaga-Huy-Luong [17]).

Consider the quotient Banach space $\mathbb{Y} := l^\infty(\mathbb{X})/c_0(\mathbb{X})$ with the induced norm. The equivalent class of $x \in l^\infty(\mathbb{X})$ will be denoted by $\bar{x}$. Since S leaves $c_0(\mathbb{X})$ invariant it induces a bounded linear operator $\bar{S}$ acting in $\mathbb{Y}$. Similarly, each operator $T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ induces an operator $\bar{T} \in \mathcal{L}(\mathbb{Y})$. Moreover, one notes that $\bar{S}$ is a surjective isometry. As a consequence, $\sigma(\bar{S}) \subset \Gamma$, where Γ denotes the unit circle $\{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ in the complex plane. We put

$$\sigma_\Gamma(C,T) := \sigma(C,T) \cap \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\} \tag{5}$$

2.1. Spectral Theory. In this subsection, we present some materials on spectral theory, see detail in 15,17 .

Firstly, the resolvent of the isometry $\bar{S}$ satisfies

$$\| R(\lambda, \bar{S}) \| \leq \frac{1}{||\lambda| - 1|}, \text{ for all } |\lambda| \neq 1 \tag{6}$$

Definition 2.1. The spectrum of $\bar{x} \in \mathbb{Y}$, denoted by $\sigma(\bar{x})$, is defined to be the set of all non-removable singular points of the complex function

$$g(\lambda) := R(\lambda, \bar{S})\bar{x} \tag{7}$$

If $x = \{x(n)\}_n \in l^\infty(\mathbb{X})$, then, its spectrum, denoted by $\sigma(x)$, is said to be $\sigma(\bar{x})$.

From the definition of spectrum of a bounded sequence x it follows that $\sigma(x)$ is a closed subset of $\mathbb{C}$.

Lemma 2.2 (Minh [15, Lemma 2.2]). Assume that $\bar{x} \in \mathbb{Y}$, and ξ_0 is an isolated point of $\sigma(\bar{x})$. Then, ξ_0 is a pole of first order of the complex function $g(\lambda) := R(\lambda, \bar{S})\bar{x}$

Definition 2.3. A sequence $\{x_n\}_n$ is said to be asymptotically constant if

$$\lim_{n\to\infty} [x(n+1) - x(n)] = 0$$

Proposition 2.4 (see Minh-Matsunaga-Huy-Luong [17]). The following assertions are valid:

(1) Let $x \in l^\infty(\mathbb{X})$. Then, $\sigma(x) = \emptyset$ if and only if $x \in c_0(\mathbb{X})$;

(2) Let $x \in l^\infty(\mathbb{X})$. Then $\sigma(x) \subset \{1\}$ if and only if x is asymptotically constant;

(3) Let Λ be a closed subset of Γ, and $\mathbb{Y}_\Lambda := \{\bar{x} \in \mathbb{Y}: \sigma(\bar{x}) \subset \Lambda\}$. Then, $\mathbb{Y}_\Lambda$ is a closed subspace of $\mathbb{Y}$;

(4) Let $\Lambda = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2$, where Λ_1, Λ_2 are disjoint closed subsets of Γ. Then, $\mathbb{Y}_\Lambda = Y_{\Lambda_1} \oplus Y_{\Lambda_2}$. Moreover, the projection associated with this direct sum commutes with the shift operator $\bar{S}$ and the operator $\bar{T}$.

3. MAIN RESUltS

In this section, we present the main results of the paper on spectral criteria for the asymptotic constancy of solutions to implicit difference equations in a Banach space. We start with the concepts of resolvent set and spectrum of a linear operators pencil (see Gohberg-Goldberg-Kaashoek 9, Chapter IV] and references therein for more information on the matter).

Definition 3.1. A linear operator pencil $\{C, T\}$, where $C, T \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$, is said to be regular if there exists $\lambda \in \mathbb{C}$ such that the linear operator $\lambda C - T$ is invertible. We set

$$R(\lambda, C, T) := (\lambda C - T)^{-1}, \text{ for all } \lambda \in \rho(C, T) \tag{8}$$

The complement of such $\lambda \in \mathbb{C}$ is called the spectrum, and is denoted by $\sigma(C, T)$.

Lemma 3.2. The following assertions are valid:

(1) The resolvent set

$$\rho(C, T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (\lambda C - T)^{-1}, (\lambda C - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{X})\} \tag{9}$$

is an open subset of $\mathbb{C}$.

(2) The function

$$\rho(C, T) \ni \lambda \mapsto R(\lambda, C, T) := (\lambda C - T)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{X}) \tag{10}$$

is analytic.

Proof.

(1) We have

$$\lambda C - T = (\lambda - \lambda_0)C + (\lambda_0 C - T) \tag{11}$$

Therefore, if $\lambda_0 \in \rho(C, T)$, then $A := (\lambda_0 C - T)^{-1}$ exists as an element of $\mathcal{L}(\mathbb{X})$. It is easily seen that if $A \in \mathcal{L}(\mathbb{X})$ is invertible, then there exists an open neighborhood of A consisting of all invertible operators. That means, if $\lambda - \lambda_0$ is sufficiently small, $(\lambda - \lambda_0)C + (\lambda_0 C - T)$.

(2) Let $\lambda_0 \in \rho(C, T)$ and $\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0)$ with sufficiently small $\varepsilon > 0$. We have

$$\begin{aligned}
&(\lambda_0 C - T)^{-1}(\lambda C - T) \\
&= (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 C - T)^{-1}C + (\lambda_0 C - T)^{-1}(\lambda_0 C - T) \\
&= (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 C - T)^{-1}C + I
\end{aligned}$$

Therefore, for sufficiently small ε, say,

$$\varepsilon < \frac{1}{\|(\lambda_0 C - T)^{-1}C\|}$$

by Neumann series formula, the operator

$$\begin{aligned}
&[(\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 C - T)^{-1}C + I]^{-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda - \lambda_0)^k (\lambda_0 C - T)^{-k} C^k
\end{aligned}$$

That means,

$$[(\lambda_0 C - T)^{-1}(\lambda C - T)]^{-1} = (\lambda C - T)^{-1}(\lambda_0 C - T)$$

exists and is an analytic function of λ in a small neighborhood of $\lambda_0 \in \rho(C, T)$. Since $(\lambda_0 C - T)$ is invertible, this yields that $(\lambda C - T)^{-1}$ is well defined and analytic in a small neighborhood of λ_0.

The lemma is proved.

Definition 3.3 (see Minh-Matsunaga-Huy-Luong [17, Definition 2.2]). Let $u = \{u(n)\}_n$ be a bounded sequence in $\mathbb{X}$. Then, u is said to be an asymptotic solution to 11 if

$$Cu(n+1) = Tu(n) + y(n) + \varepsilon(n),\ n \in \mathbb{N}$$

where the sequence $\{\varepsilon(n)\}_n$ satisfies $\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$.

Lemma 3.4. Let $x = \{x(n)\}_n$ be a bounded asymptotic solution to (1) and $y = \{y(n)\}_n$ is any bounded sequence. Then,

$$\sigma(y) \subset \sigma(x) \subset \sigma(y) \cup \sigma_\Gamma(C,T) \tag{12}$$

Proof.

(1) We prove that

$$\sigma(x) \subset \sigma(y) \cup \sigma_\Gamma(C,T) \tag{13}$$

Applying the transformation (7) to (1), we have

$$R(\lambda,\bar{S})\bar{C}\bar{S}\bar{x} = R(\lambda,\bar{S})\bar{T}\bar{x} + R(\lambda,\bar{S})\bar{y},\ \text{for all } |\lambda| \neq 1 \tag{14}$$

Since $R(\lambda,\bar{S})\bar{S}\bar{x} = \lambda R(\lambda,\bar{S})\bar{x} - \bar{x}$, we obtain that

$$\lambda R(\lambda,\bar{S})\bar{C}\bar{S}\bar{x} - \bar{C}\bar{x} = R(\lambda,\bar{S})\bar{T}\bar{x} + R(\lambda,\bar{S})\bar{y} \tag{15}$$

Suppose that $\Gamma \ni \lambda_0 \notin \sigma(y) \cup \sigma_\Gamma(C,T)$. Then, $R(\lambda,\bar{C},\bar{T})$, by Lemma 3.2 and $R(\lambda,\bar{S})\bar{y}$ are extendable to an analytic function in a neighborhood of λ_0. Therefore,

$$(\lambda\bar{C} - \bar{T})R(\lambda,\bar{S})\bar{x} = \bar{C}\bar{x} + R(\lambda,\bar{S})\bar{y},\ |\lambda| \neq 1 \tag{16}$$

thus,

$$R(\lambda,\bar{S})\bar{x} = R(\lambda,\bar{C},\bar{T})(\bar{C}\bar{x} + R(\lambda,\bar{S})\bar{y}),\ |\lambda| \neq 1 \tag{17}$$

Therefore, $R(\lambda,\bar{S})\bar{x}$ is analytic in a neighborhood of λ_0, hence $\lambda_0 \notin \sigma(x)$. This proves 13).

(2) We now prove that

$$\sigma(y) \subset \sigma(x) \tag{18}$$

From 16), we have

$$(\lambda\bar{C} - \bar{T})R(\lambda,\bar{S})\bar{x} - \bar{C}\bar{x} = R(\lambda,\bar{S})\bar{y},\ |\lambda| \neq 1 \tag{19}$$

If $R(\lambda,\bar{S})\bar{x}$ an be extended to an analytic function in a neighborhood of $\lambda_0 \in \Gamma$, then so is the left-hand side of 19). Therefore, $R(\lambda,\bar{S})\bar{y}$ is also extendable to an analytic function in a neighborhood of $\lambda_0 \in \Gamma$, that is, $\lambda_0 \notin \sigma(y)$. This implies $\sigma(y) \subset \sigma(x)$, finishing the proof.

The proof is completed.

Remark 3.5. The part " $\sigma(x) \subset \sigma(y) \cup \sigma_\Gamma(C,T)$ " in Lemma 3.4 is an analog to Naito-Minh-Shin [20, Lemma 3.2] for the implicit difference equations.

Below we will apply Lemma 3.4 to study the asymptotic constancy of solutions to implicit differece equation (1), where y is assumed to be a bounded sequence.

Theorem 3.6. The necessary condition for (1), where y is assumed to be a bounded sequence, to have an asymptotic constant solution is

$$\sigma(y) \subset \{1\} \tag{20}$$

That is y must be asymptotic constant itself.

Proof. Since Lemma 3.4, we have $\sigma(y) \subset \sigma(x)$. If x is an asymptotic constant, then $\sigma(x) \subset \{1\}$. This finishes the proof.

Theorem 3.7. Suppose that

(1) $\{y(n)\}_n \subset l^\infty(\mathbb{X})$ is asymptotically constant, and

(2) $\sigma_\Gamma(C,T) \subset \{1\}$.

Then, every bounded asymptotic solution to (1) is asymptotically constant.

Proof. By Lemma 3.4, we have

$\sigma(x) \subset \sigma(y) \cup \sigma_\Gamma(C,T) \subset \{1\}$

for any asymptotic solution $x \in l^\infty(\mathbb{X})$ to 11. Therefore, x is asymptotically constant according to Proposition 2.4

Theorem 3.8. Suppose that

(1) sequence $\{y(n)\}_n \subset l^\infty(\mathbb{X})$ is asymptotically constant;

(2) if either $1 \notin \sigma_\Gamma(C,T)$, or 1 is an isolated point of $\sigma_\Gamma(C,T)$;

(3) Equation (2) has a bounded asymptotic solution.

Then, (2) has an asymptotic solution that is asymptotically constant.

Proof. Set $\Lambda_1 := \{1\}$ and $\Lambda_2 = \sigma_\Gamma(C,T) \setminus \{1\}$. Then Λ_1 and Λ_2 are both closed and disjoint by the assumption. By Proposition 2.4, we have

$$\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \tag{21}$$

where $\bar{x}_1 := P\bar{x}, \bar{x}_2 = (I-P)\bar{x}$, and P is the Riesz spectral project corresponding to the splitting $\mathbb{Y}_\Lambda = \mathbb{Y}_{\Lambda_1} \oplus \mathbb{Y}_{\Lambda_2}$. Since x is an asymptotic solution to 11,

$$CSx = Tx + y + \varepsilon, \ \text{ where } \varepsilon = \{\varepsilon(n)\}_n \in c_0(\mathbb{X}) \tag{22}$$

so

$$P\bar{C}\bar{S}\bar{x} = P\bar{T}\bar{x} + P\bar{y} \tag{23}$$

As $\sigma(\bar{y}) \subset \{1\}$, we have

$$P\bar{C}\bar{S}\bar{x} = P\bar{T}\bar{x} + \bar{y}. \tag{24}$$

Therefore

$\bar{C}\bar{S}P\bar{x} = \bar{T}P\bar{x} + \bar{y}$

since P commutes with $\bar{S}$ and $\bar{T}$. If we choose z as a representative of $P\bar{x}$, then z satisfies the equation

$$Cz(n+1) = Tz(n) + y(n) + \varepsilon'(n) \tag{25}$$

where $\{\varepsilon'(n)\}_n \in c_0(\mathbb{X})$. Obviously, $\{z(n)\}_n$ is an asymptotic solution to 11 , and is asymptotically constant since $\sigma(z) \subset \{1\}$.

4. An Application to Evolution Equations Associated with C-SEMIGROUPS

This section presents an application to evolution equations associated with C semigroups. The concept of C-semigroups introduced to approach a larger class of evolution equations which are ill-posed (see, e.g., [5, 30, 31] and the references therein for more information).

Definition 4.1. A family of bounded linear operators $(T(t))_{t\geq 0}$ from a Banach space $\mathbb{X}$ to itself is called 1-periodic C-semigroup if the following conditions are satisfied

(1) $T(0) = C$;

(2) $T(t+s) = T(t)T(s)C$ for all $t, s \geq 0$;

(3) for each $x \in \mathbb{X}$, the map $t \mapsto T(t)x$ is continuous;

(4) $T(t+1) = T(t)$ for all $t \geq 0$;

(5) $\| T(t) \| \leq Ne^{\omega t}$ for some positive constants N and ω independent of $t \geq 0$.

A function $f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is said to be asymptotically 1-periodic if

$$\lim_{t\to\infty} [f(t+1) - f(t)] = 0 \tag{26}$$

Consider the following linear 1-periodic evolution equation

$$x' = Ax + f(t),\ t \geq 0 \tag{27}$$

where $x \in \mathbb{X}, f$ is an asymptotically 1-periodic function. The homogeneous evolution equation

$$x' = Ax,\ t \geq 0 \tag{28}$$

of Equation 27) is said to be C-well-posed if it generates a 1-periodic C-semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$ in $\mathbb{X}$.

Definition 4.2. A function $u \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is a mild asymptotic solution of Equation (27) if there is a function $\varepsilon \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ such that

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = 0 \tag{29}$$

$$Cu(t) = T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-\xi)[f(\xi) + \varepsilon(\xi)]\mathrm{d}\xi,\ t \geq 0 \tag{30}$$

We denote P the monodromy operator $T(1)$ of the semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$. As an application of Theorem 3.7 we have the following:

Theorem 4.3. Assume that the homogeneous evolution equation (28) generates a 1-periodic C-semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$ in a Banach space $\mathbb{X}$ such that

$$\sigma_\Gamma(C, P) \subset \{1\} \tag{31}$$

Then, every bounded asymptotic solution to (27) satisfies

$$\lim_{t\to\infty} \| C(u(t+1) - u(t)) \| = 0 \tag{32}$$

Proof. If u is a mild asymptotic solution to 27, then

$$Cu(n+1) = T(1)u(n) + \int_n^{n+1} T(n+1-\xi)[f(\xi) + \varepsilon(\xi)]\mathrm{d}\xi \tag{33}$$

Put

$$y(n) := \int_n^{n+1} T(n+1-\xi)[f(\xi) + \varepsilon(\xi)]\mathrm{d}\xi \tag{34}$$

From the 1-periodicity of the C-semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$ we have $T(1) = P$. Then, 33 becomes

$$Cu(n+1) = Pu(n) + y(n),\ n \in \mathbb{N} \tag{35}$$

We will show that $\{y(n)\}_n$ is asymptotically constant. By computing directly, we can obtain that

$$y(n+1)-y(n)$$
$$=\int_{n+1}^{n+2} T(n+2-\xi)[f(\xi)+\varepsilon(\xi)]\mathrm{d}\xi-\int_{n}^{n+1} T(n+1-\xi)[f(\xi)+\varepsilon(\xi)]\mathrm{d}\xi$$
$$=\int_{n}^{n+1} T(n+1-\xi)[f(\xi+1)+\varepsilon(\xi+1)-f(\xi)-\varepsilon(\xi)]\mathrm{d}\xi$$

Since f is an asymptotically 1-periodic function and the limit $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0$ it follows that

$$\lim_{n\to\infty}[y(n+1)-y(n)]=0$$

In other words, $\{u(n)\}_n$ is an asymptotic solution to 35). Under the assumption in Theorem 4.3, all conditions of Theorem 3.7 are satisfied. Hence, every bounded asymptotic solution to is5 isymptotic constant,

$$\lim_{n\to\infty}[u(n+1)-u(n)]=0 \tag{36}$$

Denoting $n=[t]$, the integer part of t, we have

$$C(u(t+1)-u(t))$$
$$=T(t-n)[u(n+1)-u(n)]+\int_{n+1}^{t+1} T(t+1-\xi)[f(\xi)+\varepsilon(\xi)]\mathrm{d}\xi$$
$$-\int_{n}^{t} T(t-\xi)[f(\xi)+\varepsilon(\xi)]\mathrm{d}\xi$$
$$=T(t-n)[u(n+1)-u(n)]$$
$$+\int_{n}^{t} T(t-\xi)[(f(\xi+1)+\varepsilon(\xi+1))-(f(\xi)+\varepsilon(\xi))]\mathrm{d}\xi$$

By Definition 4.1, we have the following estimate

$$\| C(u(t+1)-u(t)) \|$$
$$\le Ne^{\omega} \| u(n+1)-u(n) \| +Ne^{\omega}\int_{n}^{t} \| f(\xi+1)+\varepsilon(\xi+1)-f(\xi)-\varepsilon(\xi) \| \mathrm{d}\xi$$

Since $\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t)=0$, the asymptotical 1-periodicity of f and the asymptotic constancy of $\{u(n)\}_n$, it follows that

$$\lim_{t\to\infty} \| C(u(t+1)-u(t)) \| = 0$$

The theorem is proved.

REFERENCES

[1] C.J.K. Batty, J. van Neerven, and F. Rabiger, Local spectra and individual stability of uniformly bounded C_0-semigroups, Transactions of the American Mathematical Society 350 (1998), 2071-2085.

[2] C. Batty and D. Seifert, Some developments around the Katznelson-Tzafriri theorem, Acta Scientiarum Mathematicarum 88 (2022), no. 1-2, 53-84.

[3] C. Batty and D. Seifert, A continuous-parameter Katznelson-Tzafriri theorem for algebras of analytic functions, Studia Mathematica 270 (2023), no. 2, 229-239

[4] B.X. Dieu, S. Siegmund, and N.V. Minh, A Katznelson-Tzafriri type theorem for almost periodic linear evolution equations, Vietnam Journal of Mathematics 43 (2015), 403-415.

[5] T. Furumochi, T. Naito, and N.V. Minh, Boundedness and almost periodicity of solutions of partial functional differential equations, Journal of Differential Equations 180 (2002), 125152 .

[6] Y. Katznelson and L. Tzafriri, On power bounded operators, Journal of Functional Analysis 68 (1986), 313-328

[7] V.T. Luong, D.V. Loi, N.V. Minh, and H. Matsunaga, A Massera theorem for asymptotic periodic solutions of periodic evolution equations, Journal of Differential Equations 329 (2022), 371-394.

[8] N.V. Minh, Asymptotic behavior of individual orbits of discrete systems, Proceedings of the American Mathematical Society 137 (2009), 3025-3035.

[9] N.V. Minh, H. Matsunaga, N.D. Huy, and V.T. Luong, A Katznelson-Tzafriri type theorem for difference equations and applications, Proceedings of the American Mathematical Society 150 (2022), no. 3, 1105-1114.

[10] T. Naito, N.V. Minh, and J.S. Shin, New spectral criteria for almost periodic solutions of evolution equations, Studia Mathematica 145 (2001), 97-111.

[11] V.Q. Phong, A short proof of the Y. Katznelson's and L. Tzafriri's theorem, Proceedings of the American Mathematical Society 115 (1992), 1023-1024.

LỖI CỦA HỌC SINH TRONG GIẢI TOÁN GIẢI TÍCH: NGHIÊN CỨU ĐIỀU TRA HỌC SINH VÀ GIÁO VIÊN Ở BỐN TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG THÀNH PHỐ HẢI DƯƠNG

ThS. Vũ Thị Thảo [1]

[1] Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Dương

Email: uhdthaovu82.edu@gmail.com

Tóm tắt: Bài báo tường thuật kết quả khảo sát lỗi của học sinh trong giải toán giải tích. Đối tượng khảo sát là học sinh lớp 12, và giáo viên dạy toán ở các lớp được khảo sát. Kết quả cho thấy là học sinh phạm nhiều loại lỗi khác nhau trong giải toán giải tích, giáo viên cũng cho rằng việc phạm các lỗi trên của học sinh là thường xuyên. Kết quả thu được cũng tương hợp với các nhận định của các chuyên gia trong và ngoài nước.

Từ khóa: *Lỗi, phân tích lỗi, dạy học giải tích, giải tích*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Nghiên cứu lỗi của học sinh là một công việc cần thiết của giáo viên dạy học ở trường phổ thông. R. Marzano xem phân tích lỗi của học sinh là một biện pháp để mở rộng và tinh lọc kiến thức, khi phân tích lỗi cần chú ý: phải xác định đó là lỗi gì, nguyên nhân nào dẫn đến lỗi và cách ngăn ngừa. Cũng bàn về lỗi của học sinh, tác giả Nguyễn Phú Lộc (2008) đặc biệt chú ý dự đoán và ngăn ngừa lỗi của học sinh trong quá trình dạy học toán. Về thái độ của giáo viên đối với lỗi, tác giả M. . Lagutko (2008) quan niệm rằng: (1) giáo viên thừa nhận quyền bị lỗi của học sinh; (2) giáo viên phải cố gắng hiểu biết lỗi của học sinh đã xảy ra; (3) trong quá trình dạy học cần dạy cho học sinh các chiến lược hạn chế lỗi khi làm bài như kiểm tra lại đáp số, kiểm tra lại các bước biến đổi, kiểm tra lại việc tính toán, liên hệ với bối cảnh thực tiễn, sử dụng đồ thị, giải bài toán bằng các cách khác nhau. Về học tập môn Toán, tác giả Legutko cũng cho rằng việc học sinh phạm lỗi là điều không thể tránh. Trong giải toán môn Giải tích, học sinh cuối cấp thường phạm những lỗi gì?

Ý kiến của giáo viên về mức độ thường xuyên của các lỗi của học sinh ra sao?

Định nghĩa và khái niệm

Theo từ điển tiếng Việt phổ thông (Chu Bích Thu và ctv, 2013) thì lỗi có nghĩa là: "Chỗ sai sót do không thực hiện đúng quy tắc; Điều sai sót, không nên, không phải trong cách cư xử, trong hành động; Có chỗ sai sót về mặt kỹ thuật; Có điều sai, trái, không đúng đạo lí" [1]

Trên cơ sở định nghĩa trên đây, trong bài báo này tôi định nghĩa lỗi trong lời giải một bài toán như sau:

Lỗi trong lời giải một bài toán là chỗ sai sót do thực hiện không đúng quy tắc, không áp dụng đúng công thức, định lý hoặc do hiểu sai khái niệm, định lý, hiểu sai đề bài, hoặc lỗi có thể do tính toán nhầm lần, do không chính xác trong sử dụng ngôn ngữ và suy luận.

2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Phương pháp nghiên cứu và đối tượng khảo sát

- Phân tích nội dung: Phân tích bài làm của học sinh trong các kỳ kiểm tra trong năm học 2022-2023 của học sinh lớp 12 để tìm và phân loại các lỗi của học sinh đã gặp phải khi giải các bài toán giải tích.

- Điều tra bằng bảng câu hỏi: Sau khi phân loại các lỗi của học sinh, tôi dùng Bảng câu hỏi để tìm hiểu ý kiến của giáo viên về mức độ thường xuyên về các lỗi của học sinh.

- Đối tượng khảo sát:

Học sinh: Học sinh lớp 12 trong năm học 2022- 2023 thuộc 4 trường trung học phổ thông.

Giáo viên: 26 giáo viên toán của trường trung học phổ thông có học sinh được khảo sát.

Trường	Lớp	Số bài
THPT Lương Thế Vinh	12A, 12B, 12C, 12D, 12E	499
THPT Thành Đông	12A, 12B	225
THPT Chu Văn An	12A, 12B, 12C	291
THPT Nguyễn Du	12A, 12B,12C,12D	285

2.2. Kết quả khảo sát và bàn luận

2.2.1. Kết quả

Về học sinh

Qua quá trình điều tra khảo sát thực tế bài viết của học sinh ở một số trường trung học phổ thông trên địa bàn thành phố Hải Dương như đã nêu ra ở trên tôi nhận thấy rằng: những lỗi mà học sinh mắc phải khi học tập giải tích là rất đa dạng. Bảng 2 cho chúng ta thấy các loại lỗi của học sinh và tỉ lệ phạm lỗi của từng trường.

Bảng 2: Kết quả phiếu điều tra học sinh

Trường / **Các loại lỗi**	**Lương Thế Vinh**	**Thành Đông**	**Chu Văn An**	**Nguyễn Du**
1. Lỗi do tính toán sai.	14,1	41,3	51,5	31,6
2. Lỗi do thiếu điều kiện hoặc đặt điều kiện không đúng.	26,3	17,3	61,9	63,2
3. Lỗi do hiểu sai khái niệm.	6,5	25,3	5,2	10,5
4. Lỗi do hiểu sai định lí, hoặc công thức	23,7	10,6	56,7	17,9
5. Lỗi do nhớ sai công thức, quy tắc và ký hiệu.	12,8	58,7	46,4	54,7
6. Lỗi do không thành thạo khi áp dụng các kỹ thuật cơ bản,giải các dạng toán cơ bản.	19,2	21,3	27,8	35,1
7. Lỗi do không biết diễn đạt chính xác khi trình bày lời giải	11,5	18,7	13,4	21,6
8. Lỗi do ghi sai đề, không chú ý giả thiết của đề bài.	1,3	26,7	10,3	12,6
9. Lỗi do ngộ nhận kiến thức.	9,6	5,3	8,2	13,7
10. Lỗi do xét thiếu trường hợp.	11,5	17,9	20,6	25,3

Về giáo viên

Bảng 3: Tường thuật ý kiến của giáo viên về mức độ thường xuyên của học sinh trong từng loại lỗi

Các lỗi của học sinh khi học tập giải tích	Mức độ		
	Thường xuyên (%)	Thỉnh thoảng (%)	Hầu như không có (%)
1. Lỗi do tính toán sai.	71,4	28,6	0
2. Lỗi do thiếu điều kiện hoặc đặt điều kiện không đúng.	21,4	78,6	0
3. Lỗi do hiểu sai khái niệm.	35,7	60,8	3,6
4. Lỗi do hiểu sai định lí, hoặc công thức	32,1	67,9	0
5. Lỗi do nhớ sai công thức, quy tắc và ký hiệu.	39,3	60,7	0
6. Lỗi do không thành thạo khi áp dụng các kỹ thuật cơ bản, giải các dạng toán cơ bản.	28,6	71,4	0
7. Lỗi do không biết diễn đạt chính xác khi trình bày lời giải.	57,1	42,9	0
8. Lỗi do ghi sai đề, không chú ý giả thiết của đề bài.	14,3	67,8	17,9
9. Lỗi do ngộ nhận kiến thức.	28,6	67,8	3,6
10. Lỗi do xét thiếu trường hợp.	35,7	60,7	3,6
Các nguyên nhân khác	0	0	0

2.2.2 Bàn luận

Thông qua kết quả của hai bảng khảo sát, chúng ta thấy lỗi học sinh trong giải toán giải tích là khá đa dạng và do nhiều nguyên nhân khác nhau. Các giáo viên được khảo sát cũng đồng tình cho rằng các lỗi như vậy xảy ra gần như thường xuyên ở học sinh. Ngoài ra, kết quả thu được cho thấy thực tiễn phạm lỗi của học sinh tương hợp với nhận định về đặc điểm của Giải tích (Nguyễn Phú Lộc, 2010) và quan điểm về lỗi của M. Legutko 2008). Do vậy, để nâng cao hiệu quả dạy học môn Giải tích ở trường phổ thông, trong quá trình dạy học giáo viên cần chú ý ngăn ngừa và kịp thời sửa lỗi cho học sinh, cũng như hướng dẫn học sinh các cách hạn chế bị lỗi khi giải toán giải tích.

2.3. Dẫn chứng các trường hợp lỗi của học sinh

2.3.1 Lỗi do tính toán sai

trích từ đề kiểm tra tập thể 45 phút chương Nguyên hàm - Tích phân và Ứng dụng của trường Trung học Phổ thông Chu Văn An)

Nguyên hàm $F(x)$ của hàm $f(x)$ có dạng:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int cos3x\cos 5xdx =$$

$$\frac{1}{2}\int (cos2x + cos8x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}sin2x + \frac{1}{8}sin8x\right) + C$$

Mà $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$ nên $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{4} + \frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{4}\right) + C = -2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} + C = -2 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$

Vậy $F(x) = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{2}$

Sai lầm học sinh đã sai khi tính $C = -\frac{1}{2}$

2.3.2. Lỗi do thiếu đặt điều kiện hoặc đặt điều kiện không đúng

Ví dụ 2: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = x^3 - 3x + 2$, biết tiếp tuyến song song với đường thẳng y = 9x+18.

Lời giải (trích từ đề kiểm tra tập thể 45 phút chương Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số của trường Trung học Phổ thông Thành Đông)

Gọi (d) là tiếp của đồ thị (C) song song với đường thẳng y = 9x+18. Phương trình tiếp tuyến d có dạng: y = 9x+b

(d) là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} 9x + b = x^3 - 3x + 2 \\ 9 = 3x^2 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ b = 8 \end{cases}$$

Vậy các phương trình tiếp tuyến cần tìm là

y=9x-14 và y = 9x +18

Lỗi: do học sinh không đặt điều kiện $18 \neq b$ nên đã không loại đường thẳng y = 9x +18.

2.3.3. Lỗi do hiểu sai khái niệm

Ví dụ 3: Tính tích phân sau: $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{3x^2+1}}$.

Lời giải: (trích từ đề kiểm tra tập thể 45 phút chương Nguyên hàm - Tích phân và Ứng dụng của trường Trung học Phổ thông Chu Văn An)

Nguyên hàm $F(x)$ của hàm $f(x)$ có dạng:

Đặt $t = \sqrt{3x^2 + 1} \Rightarrow t^2 = 3x^2 + 1$

$\Rightarrow 2tdt = 6xdx \Rightarrow xdx = \frac{1}{3}tdt$

Đổi cận: $x = 1 \Rightarrow t = 2, x = 0 \Rightarrow t = 1$

Khi đó, ta có:

$$I = \frac{1}{3}\int_1^2 \frac{tdt}{t} = \frac{1}{3}\int_1^2 dt = \frac{1}{3}t\Big|_1^2 + C = \frac{1}{3} + C$$

Sai lầm học sinh hiểu không chính xác định nghĩa tích phân và nguyên hàm nên đã nhầm lẫn giữa tích phân và nguyên hàm.

2.3.4. Lỗi do hiểu sai định lý hoặc công thức

Ví dụ 4: Tính nguyên hàm $\int (3x+1)^5 dx$

Lời giải: (trích từ đề kiểm tra tập thể 45 phút chương Nguyên hàm - Tích phân và Ứng dụng của trường Trung học Phổ thông Lương Thế Vinh)

$$\int(3x+1)^5dx=\frac{(3x+1)^6}{6}+C$$

Nguyên nhân dẫn đến sai lầm: Học sinh vận dụng công thức $\int x^\alpha \mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$ với α≠-1 mà không sử dụng công thức

$$\int(ax+b)^\alpha \mathrm{d}x=\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$$

Lời giải đúng

$$\int(3x+1)^5dx=\frac{1}{3}\frac{(3x+1)^6}{6}+C=\frac{(3x+1)^6}{18}+C$$

2.3.5. Lỗi do không nhớ chính xác quy tắc công thức, kí hiệu

Ví dụ 5: Tính nguyên hàm $\int(2x-1)dx$

Lời giải: (trích từ đề kiểm tra tập thể 45 phút chương Nguyên hàm - Tích phân và Ứng dụng của trường Trung học Phổ thông Chu Văn An)

$$\int(2x-1)dx=\int 2xdx-\int 1dx$$
$$=(x^2+C)-(x+C)=x^2-x$$

Nguyên nhân dẫn đến sai lầm: Học sinh viết chung số C cho mọi công thức

Lời giải đúng:

$$\int(2x-1)dx=\int 2xdx-\int 1dx=$$
$$=(x^2+C_1)-(x+C_2)=x^2-x+C\quad(C=C_1-C_2)$$

2.3.6. Lỗi do không thành thạo khi áp dụng các kỹ thuật cơ bản, giải các dạng toán cơ bản

Ví dụ 6: Tính tích phân sau:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos x}\cdot\sin x dx$$

Lời giải: (trích từ đề kiểm tra tập thể 45 phút chương Nguyên hàm - Tích phân và Ứng dụng của trường Trung học Phổ thông Chu Văn An)

Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow t^2=1+3\cos x\Rightarrow \sin x dx=-\frac{2}{3}tdt$

Khi đó:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos x}\cdot\sin x dx=-\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2dt=-\frac{2t^3}{9}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi^3}{36}$$

Sai lầm học sinh dùng phương pháp đổi biến số nhưng lại quên đổi cận dẫn đến kết quả sai.

2.3.7. Lỗi do không biết diễn đạt chính xác trong trình bày lời giải

Ví dụ 7: Tính tích phân sau:

$K=\int_2^{2e}\ln\frac{x}{2}dx$.

Lời giải: (trích từ đề kiểm tra tập thể 45 phút chương Nguyên hàm - Tích phân và Ứng dụng của trường Trung học Phổ thông Nguyễn Du)

Đặt $\begin{cases} u = \ln\frac{x}{2} \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \end{cases}$

Ta được

$K = \ln\frac{x}{2}\cdot x\Big|_2^{2e} - \int_2^{2e} x\cdot\frac{1}{x}dx$

$= \ln\frac{x}{2}\cdot x\Big|_2^{2e} - \int_2^{2e} 1.dx$

$= \ln\frac{x}{2}\cdot x\Big|_2^{2e} - x|_2^{2e}$

$\ln\frac{2e}{2}\cdot 2e - 0 - (2e-2)$

$2e - 2e + 2 = 2$

Sai lầm học sinh không biết cách trình bày lời giải.

2.3.8. Lỗi do ghi sai đề, không sử dụng giả thiết của đề bài

Ví dụ 8:

Tính tích phân sau: $\int_1^2 (x-1)^2 x dx$

Lời giải: (trích từ đề kiểm tra tập thể 45 phút chương Nguyên hàm - Tích phân và Ứng dụng của trường Trung học Phổ thông Nguyễn Du)

Ta có: $\int_1^2 (x-1)^2 dx = \int_1^2 (x^2-2x+1)dx = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Sai lầm do học sinh chép sai đề nên dẫn đến sai

Trên đây là một số sai lầm mà học sinh mắc phải khi tính tích phân, đó là những sai lầm khó phát hiện đối với các em học sinh. Những sai lầm này phần lớn xuất phát từ sự thiếu chắc chắn về kiến thức cộng với thói quen làm bài thường gặp những "tình huống thuận lợi" dẫn tới tư tưởng chủ quan, nóng vội, cẩu thả. Đôi khi cũng gặp phải ở tình huống các em bị áp lực tâm lí khi làm bài dẫn tới trạng thái không kiểm soát nổi hành vi của bản thân. Để khắc phục những sai lầm đó, ngoài những biện pháp đã nêu, người giáo viên vẫn cần phải giúp các em học sinh rèn luyện các đức tính cẩn thận, tỉ mỉ, kiên trì và đặc biệt là khắc phục những điểm yếu tâm lí khi làm bài. Giáo viên cũng nên tạo cho học sinh thói quen "tự vấn", "tự phản biện" khi làm bài để phát hiện và hạn chế tối đa các sai lầm mắc phải.

2.3.9. Lỗi do ngộ nhận kiến thức

Ví dụ 9: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2\ln x$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};e\right]$

Lời giải (trích từ đề kiểm tra tập thể 45 phút chương Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số của trường Trung học Phổ thông Thành Đông)

Hàm số $y = x^2\ln x$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2};e\right]$

$y' = 2x\frac{1}{x} = 2 > 0, \forall x \in \left[\frac{1}{2};e\right]$

$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.\ln\left(\frac{1}{2}\right)$; $y(e)=e^2$

Vậy $\underset{\left[\frac{1}{2};e\right]}{Max}y=y(e)=e^2$; $\underset{\left[\frac{1}{2};e\right]}{Min}y=y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

Lỗi: do học sinh không thuộc quy tắc tính đạo hàm (u.v)' u'.v+ u.v' uv (với u =u(x), v=v(x) là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định) nên từ việc tính đạo hàm sai dẫn đến kết quả sai.

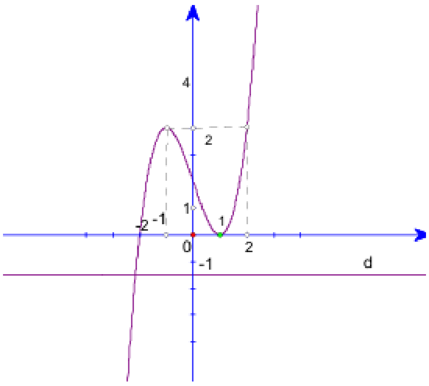
2.3.10. Lỗi do xét thiếu trường hợp

Ví dụ 10: Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình $x^3-3x+2-m=0$

<u>Lời giải</u> (trích từ đề kiểm tra tập thể 45 phút chương Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số của trường Trung học Phổ thông Lương Thế Vinh)

Ta có $x^3-3x+2-m=0 \Leftrightarrow x^3-3x+2=m$

Số giao điểm của đồ thị (C) $y=x^3-3x+2$ và (d) y = m bằng số nghiệm của phương trình đã cho



+) m < 0 có 1 điểm chung nên phương trình có 1 nghiệm

+) m = 0 có 2 điểm chung nên phương trình có 2 nghiệm

+) 0 < m < 4 có 3 điểm chung nên phương trình có 3 nghiệm

+) m = 4 có 2 điểm chung nên phương trình có 2 nghiệm

Lỗi: học sinh biện luận thiếu trường hợp

m > 4 : phương trình đã cho có 1 nghiệm

3. KẾT LUẬN

Từ các kết quả nghiên cứu thu được như trình bày trên đây cho phép tôi kết luận rằng trong quá trình giải các bài toán giải tích học sinh thường gặp những lỗi khác nhau. Do vậy, giáo viên cần có thái độ tích cực đối với sai lầm của học sinh và xem những sai lầm của học sinh như những thông tin phản hồi cần được suy ngẫm để có sự điều chỉnh phương pháp dạy học, có biện pháp ngăn ngừa lỗi cho học sinh, và xem đó là một biện pháp sư phạm nhằm góp phần nâng cao chất lượng giáo dục toán học trong trường phổ thông

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Chu Bích Thu và *ctv* (Viện ngôn ngữ học), 2013. Tự điển Tiếng Việt phổ thông (tái bản lần thứ nhất). NXB Phương Đông. TP.HCM.

[2] Legutko, M., 2008. An analysis of students' mathematical errors in teaching-research process. In "Handbook of Mathematics Teaching Research: Teaching Experiment A Tool for Teacher-Researchers" (Output of the Krygowska Project "Professional Development of Teacher-Researchers" 20052008 Supported by a grant from Socrates Comenius 2.1 Program No. 226685-CP-12005-1-PL-COMENIUS-C21 Printed in Drukarnia Cyfrowa KSERKOP, Kraków.

[3] Nguyễn Phú Lộc, 2008. Giáo trình xu hướng dạy học không truyền thống. Trường Đại học Cần Thơ, TP. Cần Thơ.

[4] Nguyễn Phú Lộc, 2010. Dạy học hiệu quả môn giải tích trong trường trung học phổ thông. NXB Giáo dục, Hà Nội.

[5] Nguyễn Phú Lộc, 2014. Phương pháp nghiên cứu trong giáo dục. NXB Đại học Cần Thơ. TP. Cần Thơ.

HÀM MA TRẬN MŨ e^{At} VÀ ỨNG DỤNG
TRONG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

ThS. Lâm Thị Thoa [1]
[1] Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Dương
Email: uhdthoalam.edu@gmail.com

Tóm tắt: Trong bài báo này, chúng tôi trình bày về hàm ma trận mũ e^{At} và ứng dụng trong giải phương trình vi phân. Nội dung trình bày các định nghĩa về ma trận, các ma trận đặc biệt, ma trận chéo hoá được, ma trận luỹ linh, ma trận chuẩn Jordan, ma trận mũ e^{A} và các tính chất của chúng. Sử dụng các định lí liên quan đến chéo hoá ma trận để tìm hàm ma trận mũ trong các trường hợp ma trận $\mathbf{A}$ có các giá trị riêng phân biệt, giá trị riêng bội, giá trị riêng phức hay A là một ma trận chuẩn Jordan. Phần cuối bài là ứng dụng của hàm ma trận mũ trong việc giải phương trình vi phân. Chứng minh sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của hệ $x'(t) = Ax(t)$ thoả mãn điều kiện ban đầu.

Từ khóa: *Hàm ma trận mũ, ma trận chéo hoá được, ma trận luỹ linh, ma trận chuẩn Jordan.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phương trình vi phân là một trong những môn học quan trọng trong chương trình toán cao cấp, nó là cầu nối giữa toán cao cấp và toán ứng dụng. Trong phương trình vi phân, chúng ta quan tâm đến sự tồn tại nghiệm, các tính chất định tính của nghiệm. Do đó, việc tìm ra công thức nghiệm hoặc mô tả được nghiệm đóng một vai trò cốt lõi trong phương trình vi phân. Xuất phát từ bài toán: Tìm nghiệm của phương trình vi phân tuyến tính $x'(t) = ax(t)$, trong đó, $x = x(t)$ là hàm số cần tìm, t là biến số độc lập, $a \in \mathbb{R}$. Không khó để chứng minh được hàm số $x(t) = Ce^{at}$ là nghiệm của phương trình đã cho. Mở rộng phương trình sang hệ phương trình vi phân tuyến tính $X'(t) = AX(t)$, trong đó, $X = X(t)$ là hàm vectơ cần tìm, t là biến số độc lập, A là ma trận hệ số tương ứng. Khi đó, công thức nghiệm của hệ trên có công thức $X(t) = Ce^{At}$ tương tự như phương trình hay không? Và lúc đó, ta sẽ hiểu e^{At} giống như hàm e^{at} hay không? Đó là câu hỏi lớn, xuất hiện từ đầu thế kỉ XIIX. Tuy nhiên, tới tận những năm 1800, sau khi lý thuyết về ma trận xuất hiện và phát triển thì đến năm 1883, Sylvester đã đưa ra định nghĩa đầu tiên của hàm ma trận $f(A)$ cho hàm f tổng quát bất kì. Năm 1867, Laguerre [1] đưa ra định nghĩa hàm e^{X}, với X là một hàm có bậc bất kì có dạng hình thức là tổng của chuỗi

$$I + X + \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^3}{1.2.3} + \cdots$$

trong đó I là ma trận đơn vị.

Năm 1888, Peano[2] đặt kí hiệu

$$e^{R} = 1 + R + \frac{1}{2!}R^2 + \cdots$$

và khi đó,

$$e^{Rt} = 1 + Rt + \frac{1}{2!}(Rt)^2 + \cdots$$

Năm 1938, khái niệm ma trận cơ bản xuất hiện và nhiều ứng dụng của phương trình vi phân cho động lực học nhấn mạnh hơn nữa tầm quan trọng của hàm e^{At}. Như vậy, hàm ma trận mũ e^{At} đã được các nhà toán học trên thế giới nghiên cứu từ khá lâu, tuy nhiên đến nay chủ đề này vẫn còn rất nhiều điều thú vị. Với mong muốn giới thiệu cho các bạn sinh viên khoa Toán hàm ma trận e^{At} và ứng dụng của nó trong việc giải phương trình vi phân, tôi đã sưu tầm, diễn đạt lại và chỉ ra cách áp dụng chi tiết về hàm ma trận mũ.

2. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Định nghĩa 2.1 ([4], tr 40). Cho $\mathbb{K}$ là một trường tuỳ ý. Một bảng gồm $m \times n$ phần tủ a_{ij} thuộc trường $\mathbb{K}$ có dạng

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1}$$

được gọi là một ma trận cỡ $(m \times n)$.

Ta thường kí hiệu ma trận bởi các chữ $A, B, \dots$ Ma trận (1) có thể được kí hiệu đơn giản bởi: $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Khi đó A là ma trận có m dòng, n cột, hoặc A có cỡ $(m \times n)$. Khi $m = n$ thì ma trận $A = (a_{ij})_{n\times n}$ được gọi là một ma trận vuông cấp n và được kí hiệu đơn giản là $A = (a_{ij})_n$. Tập hợp tất cả các ma trận cỡ $(m \times n)$ với các phần tử thuộc trường $\mathbb{K}$ được kí hiệu là $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$.

Ví dụ 2.1. Ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ là ma trận cỡ 3×3. Ngoài ra ma trận này còn được gọi là ma trận có dạng chéo (ma trận chỉ có các phần tủ trên đường chéo chính là khác 0).

Định nghĩa 2.2. ([3], tr 250). Cho A là một ma trận vuông. Đa thức đặc trưng của A được xác định theo công thức $\det(\lambda I - A)$; trong đó I là ma trận đơn vị cấp n, λ là một vô hướng.

Số λ được gọi là giá trị riêng của A nếu nó là nghiệm của đa thức đặc trưng $\det(\lambda I - A) = 0$. Một vectơ $\vec{x} \neq \vec{0}$ được gọi là vectơ riêng ứng với giá trị riêng λ của A nếu nó thoả mãn $(\lambda I - A)x = 0$.

Ví dụ 2.2. Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Phương trình dặc truing của ma trận A là

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \,.$$

Khi đó, ta có nghiệm của phương trình trên là $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$.

Ứng với giá trị riêng $\lambda_1 = 1$, ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow v_1 + v_2 = 0 \Leftrightarrow v_1 = -v_2.$$

Chọn $v_2 = -1$ thì $v_1 = 1$. Khi đó, vectơ $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ là một vectơ riêng ứng với λ_1.

Ứng với giá trị riêng $\lambda_2 = 3$, ta có

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -v_1 + v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_1 = v_2.$$

Chọn $v_2 = 1$ thì $v_1 = 1$. Ta thu được vectơ $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ là một vectơ riêng ứng với λ_2.

Định nghĩa 2.3. ([1], tr 84) Giả sử có ma trận $A \in Mat(n \times n, \mathbb{K})$. Nếu ma trận A đồng dạng với một ma trận chéo $B \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ thì A gọi là ma trận chéo hoá được, tức là tồn tại ma trận khả nghịch $P \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ sao cho $P^{-1}BP = A$.

Định lí 2.1. ([2], tr 6) Cho các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ của ma trận A là các giá trị thực, phân biệt. Khi đó, sẽ tồn tại các vectơ riêng tương ứng $v_1, v_2, \ldots, v_n$, sao cho ma trận $P = [v_1 v_2 \ldots v_n]$ khả nghịch và ma trận $P^{-1}AP$ có dạng chéo với các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Ví dụ 2.3. Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ đề cập đến ở Ví dụ 2.2.

Ta thu được

$$P = [u_1 \quad u_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

và $$S = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

đây là một ma trận chéo.

Như vậy, Định lý 2.1 nêu ra điều kiện để một ma trận chéo hóa được, khi đó ma trận A phải có các giá trị riêng thực phân biệt. Vậy khi các giá trị riêng là nghiệm phức, hoặc nghiệm bội có sự thay đổi gì hay không? Bởi lẽ lúc đó, ma trận sẽ không chéo hóa được, không có biểu diễn $A = PSP^{-1}$. Hướng giải quyết đi từ việc chia các dạng đặc biệt của ma trận sau đó tổng quát hơn lên dạng chuẩn Jordan của ma trận. Cụ thể như sau:

Định nghĩa 2.4. ([2], tr 33). Cho A là một ma trận vuông cấp n, ta có

$$A^0 = I \quad và \quad A^k = \prod_{i=1}^{n} A = A \times A \times \ldots \times A.$$

Một ma trận A được gọi là ma trận luỹ linh nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho $A^k = 0$. Số k nhỏ nhất thoả mãn biểu thức trên được gọi là bậc của ma trận lũy linh A.

Ví dụ 2.4. Ma trận $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận luỹ linh bậc 2 .

Định lí 2.2. ([2], tr 33) Cho các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ của ma trận A là các giá trị thực tương ứng với bội của chúng. Khi đó, sẽ tồn tại các vectơ riêng tương ứng $v_1, v_2, \ldots, v_n$, sao cho $P = [v_1 v_2 \ldots v_n]$ khả nghịch và ma trận $A = S + N$, trong đó $P^{-1}SP$ có dạng chéo với các phần tử trên đường chéo chính là các giá trị riêng $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, ma trận $N = A - S$ là ma trận lũy linh cấp $k, k < n$ và S, N giao hoán.

Đây là định lý rất hay, do sự không duy nhất của P nên S, N không duy nhất nhưng chắc chắn chúng ta sẽ tìm được S, N để áp dụng được định lý vào thực tế. Trong trường hợp ma trận A chỉ gồm một giá trị riêng bội thì chúng ta chọn S chính là ma trận đường chéo với phần tử nằm trên đường chéo là giá trị riêng bội đó.

Để minh họa cho lập luận trên, chúng tôi đã cố gắng làm ví dụ sau đây một cách tổng quát để có được S dạng đặc biệt như nhận định trên.

Ví dụ 2.5. Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Đầu tiên, ta tìm nghiệm của đa thức đặc trưng

$$\det(A-\lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ (bộ i 3).}$$

Sau đó, ta tìm vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng

$$(A-\lambda I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 0 \\ -v_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v_2 = 0.$$

Ta chọn hai vectơ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ và $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ là cơ sở của $\operatorname{Ker}(A-\lambda I)$.

Tiếp theo chúng ta xét

$$(A-\lambda I)v = c_1v_1 + c_3v_3 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \\ -v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = c_1 \\ -v_2 = c_3 \end{cases} \Leftrightarrow c_1 = -c_3$$

$$\text{nên chọn } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};\ v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};\ v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ là cơ sở của } \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^2.$$

Khi đó, ma trận P và ma trận nghịch đảo P^{-1} tương ứng là

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Do đó, ta thu được $S = P\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}P^{-1}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vậy ta có $A = S + N$, với $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ là ma trận lũy linh cấp 2 .

Tương tự như Định lý 2.1 và định lí 2.2 , chúng ta tìm hiểu sang Định lý 2.3 sau:

Định lí 2.3. ([2], tr 28) Cho các giá trị riêng λ_1, λ_2 của ma trận A là cặp số phức liên hợp, phần thực là a, phần ảo là b. Khi đó, sẽ tồn tại vectơ riêng phức tương ứng w, trong đó

$w = u + iv$ sao cho $P = [v \quad u]$ khả nghịch và ma trận $P^{-1}AP$ là ma trận thực có các khối chéo cấp 2 trên đường chéo chính, hay $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.

Ví dụ 2.6. Xét ma trận A có dạng

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sau khi tính toán ta thấy ma trận A có các giá trị riêng phức là $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$, đây là hai số phức liên hợp. Ứng với giá trị riêng λ_1, ta có vectơ riêng $w_1 = u_1 + iv_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Khi đó, ma trận

$$P = [v \quad u] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quá trình thực hiện ví dụ này tương tự như chứng minh Định lý 2.3. Trong ví dụ trên, ta thấy ma trận $P^{-1}AP$ là ma trận có dạng đặc biệt. Điều này đặc biệt có ý nghĩa nếu áp dụng Mệnh đề 2.1 sẽ được trình bày phần sau. Tổng quát lên những ma trận phức tạp, có cả giá trị riêng thực, giá trị riêng phức, thậm chí cả bội ta cần thêm công cụ về dạng chuẩn Jordan. Cụ thể như sau:

Định nghĩa 2.5. ([3], tr 251) Khối Jordan là ma trận cỡ $n \times n$ có tất cả các phần tử ở trên đường chéo chính bằng λ, các phần tử ở phía trên đường chéo chính là 1 và tất cả các phần tử khác là 0 . Ta kí hiệu khối Jordan định nghĩa như trên bởi $J_{\lambda,n}$.

Định nghĩa 2.6. ([3, tr 251]) Một ma trận được gọi là ma trận dạng chuẩn Jordan nếu có thể được phân tách thành các khối chéo, mỗi khối là một khối Jordan.

Ví dụ 2.7. Ma trận $= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ là ma trận Jordan với các khối chéo là $J_{2,2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ và $J_{-1,2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Định lí 2.4. ([2], tr39) Cho A là ma trận thực với các giá trị riêng thực $\lambda_j, j = 1,2, \dots, k$ và các giá trị riêng phức $\lambda_j = a_j + ib_j; \overline{\lambda_j} = a_j - ib_j, j = k + 1, \dots, n$. Khi đó, tồn tại một cơ sở $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+1}, \dots, v_n, u_n$ trên $\mathbb{R}^{2n-k}$; trong đó $v_j, j = 1, \dots, k$ và $w_j, j = k + 1, \dots, n$ là các vectơ riêng của $A, u_j = \mathrm{Re}(w_j)$ và $v_j = \mathrm{Im}(w_j), j = k + 1, \dots, n$ sao cho ma trận $P = [v_1 \quad \dots \quad v_k \quad v_{k+1} \quad u_{k+1} \quad \dots \quad v_n \quad u_n]$ là khả nghịch và

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_r \end{bmatrix}$$

với các khối Jordan cơ bản $B = B_j, j = 1, \dots, r$ có dạng

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ với } \lambda \text{ là một giá trị riêng thực}$$

hoặc có dạng

$$B = \begin{bmatrix} D & I_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D & I_2 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & D & I_2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D \end{bmatrix}$$

trong đó $D = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}; I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ và $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ với $\lambda = a + ib$ là giá trị riêng phức của A.

Ở Định lý 2.4 , ta thấy lại sự xuất hiện của ma trận D, đây là ma trận đã xuất hiện ở Định lý 2.3. Cho nên có thể nói rằng Định lý 2.4 tổng quát hơn Định lý 2.3 .

Phần cuối cùng của mục này, chúng tôi đề cập đến hàm ma trận mũ e^{At}. Nội dung của mục này được dựa trên tài liệu [1] gồm phần chuẩn của ma trận, sự hội tụ của ma trận và chuỗi của ma trận. Sử dụng chúng, ta xây dựng định nghĩa sau:

Định nghĩa 2.7. ([1], tr 85) Ta gọi ma trận dạng hình thức $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ là ma trận mũ của ma trận A, kí hiệu là e^A hoặc $\exp(A)$.

Ta có

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots$$

Ví dụ 2.8. Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ta có $\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ (bội 2).

Ta lại có: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ và $A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Khi đó $A^m = 0, \forall m > 2$.

Do đó $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \cdots = I + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ví dụ 2.9. Cho $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

Áp dụng Ví dụ 2.1, ta có

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^n}{n!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}$$

Tiếp theo, người ta chỉ ra một vài tính chất của hàm e^A, từ đó có thể giúp việc tính toán e^A đơn giản hơn.

Mệnh đề 2.1. ([1], tr 85) Giả sử P, A, B thuộc $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}), P$ là ma trận không suy biến. Khi đó, ta có

i) Nếu $B = PAP^{-1}$ thì $e^B = Pe^A P^{-1}$.

ii) Nếu A, B giao hoán thì $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$.
iii) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$.

iv) Nếu $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R}$ thì $e^A = e^a \begin{bmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{bmatrix}$.

Ví dụ 2.10. Cho $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Ta có $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A_1 + A_2$,

mà $e^{A_1} = e^a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (theo Mệnh đề 2.1) và $e^{A_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (kết quả Ví dụ 2.1).

Do vậy, ta có $e^A = e^{A_1} e^{A_2} = e^a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = e^a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

3. CÁCH TÌM HÀM e^{At}

Theo Định nghĩa 2.8, ta có với A là một ma trận vuông, hàm e^A được định nghĩa bởi:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots$$

Khi đó,

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \cdots$$

trong đó I là một ma trận đơn vị, t là một vô hướng. Ta sẽ đi tìm hàm này trong các trường hợp sau:

3.1. Ma trận không $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

Ma trận gồm toàn số 0 giúp việc tính toán trực tiếp các số hạng trong khai triển e^{At} đơn giản. Để cho văn bản không quá dài dòng, chúng tôi lấy ma trận cấp 2 . Khi đó, hàm e^{At} có dạng

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2!}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 + \frac{t^3}{3!}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^3 + \cdots = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vậy $e^A = I$.

3.2. Ma trận A là ma trận chéo

Để cho gọn, ta xét ma trận chéo cấp 2 , có dạng $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

Khi đó, tính toán ta có

$$At = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} at & 0 \\ 0 & bt \end{bmatrix}; (At)^2 = t^2A^2 = t^2\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (at)^2 & 0 \\ 0 & (bt)^2 \end{bmatrix};$$

$$(At)^3 = t^3A^3 = t^3\begin{bmatrix} a^3 & 0 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (at)^3 & 0 \\ 0 & (bt)^3 \end{bmatrix}; (At)^j = t^j A^i = t^j \begin{bmatrix} a^j & 0 \\ 0 & b^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (at)^j & 0 \\ 0 & (bt)^j \end{bmatrix}.$$

Do đó

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} at & 0 \\ 0 & bt \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} (at)^2 & 0 \\ 0 & (bt)^2 \end{bmatrix} + \frac{1}{3!}\begin{bmatrix} (at)^3 & 0 \\ 0 & (bt)^3 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + at + \frac{1}{2!}(at)^2 + \frac{1}{3!}(at)^3 + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + bt + \frac{1}{2!}(bt)^2 + \cdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{bmatrix}$$

Vậy $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{at} & 0 \\ 0 & e^{bt} \end{bmatrix}$

3.3. Sử dụng các định lý liên quan đến chéo hóa ma trận để tìm hàm mũ e^{At}

3.3.1. Ma trận A có các giá trị riêng phân biệt

Cho A là một ma trận chéo hoá được có n giá trị riêng tương ứng với n vectơ riêng độc lập tuyến tính $v_1, v_2, \dots, v_n$. Đặt S là ma trận đường chéo với các phần tử trên đường chéo chính $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ và $P = [v_1 v_2 \dots v_n]$. Do đó, theo Định lý 2.1, ta có

$$A = PSP^{-1}, \text{ suy ra } At = (PSP^{-1})t = P(St)P^{-1}$$

Khi đó, hàm e^{At} có dạng

$$e^{At} = e^{P(St)P^{-1}}$$

$$= I + [P(St)P^{-1}] + \frac{1}{2!}[P(St)P^{-1}]^2 + \frac{1}{3!}[P(St)P^{-1}]^3 + \cdots$$

$$= PIP - 1 + [P(St)P^{-1}] + \frac{1}{2!}[P(St)^2P^{-1}] + \frac{1}{3!}[P(St)^3P^{-1}] + \cdots$$

$$= P\left[I + (St) + \frac{1}{2!}(St)^2 + \frac{1}{3!}(St)^3 + \cdots\right]P^{-1}$$

$$= Pe^{St}P^{-1}$$

Vậy $e^{At} = Pe^{St}P^{-1}$, trong đó S là ma trận đường chéo với các phần tử nằm trên đường chéo chính là các giá trị riêng của ma trận A, các cột của ma trận P là các vectơ riêng của ma trận A.

Ví dụ 3.1. Xét ma trận A ở Ví du 2.2. Khi đó,

$$e^{At} = Pe^{St}P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{e^t}{2} & \frac{-e^t}{2} \\ \frac{e^{3t}}{2} & \frac{e^{3t}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^t + e^{3t}) & \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) \\ \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) & \frac{1}{2}(e^t + e^{3t}) \end{bmatrix}.$$

3.3.2. Ma trận A có giá trị riêng bội

Ma trận A có các giá trị riêng bội. Sử dụng Định lý 2.2 và Mệnh đề 2.1 , ta thấy

$$e^A = e^{S+N} = e^S.e^N \text{ nên } e^{At} = e^{St+Nt} = e^{St}.e^{Nt}.$$

Việc tính toán e^{St}, e^{Nt} được thực hiện tương tự các mục trước. Để minh họa rõ hơn, ta xét ví dụ:

Ví dụ 3.2. Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ được cho ở Ví du 2.5.

Ta có S, N là các ma trận giao hoán và $A = S + N$ nên

$$e^A = e^S \cdot e^N \text{ hay } e^{At} = e^{St} e^{Nt}.$$

- Tính e^{Nt} : Vì ma trận N là ma trận lũy linh cấp 2 nên

$$e^{Nt} = I + Nt = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{bmatrix}.$$

- Tính e^{St}: Vì

$$S = P \begin{bmatrix} 2^t & 0 & 0 \\ 0 & 2^t & 0 \\ 0 & 0 & 2^t \end{bmatrix} P^{-1}$$

nên

$$e^{St} = P \begin{bmatrix} 2^t & 0 & 0 \\ 0 & 2^t & 0 \\ 0 & 0 & 2^t \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^t & 0 & 0 \\ 0 & 2^t & 0 \\ 0 & 0 & 2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^t & 0 & 0 \\ 0 & 2^t & 0 \\ 0 & 0 & 2^t \end{bmatrix}$$

.

Do vậy, ta thu được

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2^t & 0 & 0 \\ 0 & 2^t & 0 \\ 0 & 0 & 2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -t & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^t & 0 & 2^t \\ 0 & 0 & 0 \\ -2^t & -2^t \cdot t & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3.3. Ma trận A có các giá trị riêng phức

Với trường hợp ma trận A chỉ có cấp 2 và có các giá trị riêng phức thì sử dụng Định lý 2.3 và Mệnh đề 2.1 , ta có thể thấy ngay được

$$e^{At} = Pe^{\begin{bmatrix} at & -bt \\ bt & at \end{bmatrix}}{}_{P^{-1}} = Pe^{at} \begin{bmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Ví dụ 3.3. Xét ma trận ở Ví dụ 2.6, ma trận A có dạng $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ta có $A = PJP^{-1}$, với $J = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ nên

$$e^{At} = Pe^{Jt} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t \\ e^t \sin t & e^t \cos t \end{bmatrix} .$$

3.4. Ma trận dạng chuẩn Jordan

Ở Ví dụ 3.3, ma trận A chỉ có cấp 2 . Khi ma trận A có cấp phức tạp hơn thì sử dụng Định lý 2.4 , ta thấy xuất hiện ma trận B là các khối Jordan cơ bản. Lúc đó việc tìm ma trận e^{At} được thực hiện như thế nào? Chúng tôi đã nghiên cứu và đã tìm thành công trường hợp ma trận A có biểu diễn $A = PJP^{-1}$, với J là ma trận dạng chuẩn Jordan với các khối Jordan cơ bản dạng

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

trong đó λ là giá trị riêng thực của A. Cụ thể như sau:

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots \\ &= I + tPJP^{-1} + \frac{t^2}{2!}(PJP^{-1})^2 + \frac{t^3}{3!}(PJP^{-1})^3 + \cdots \\ &= PP^{-1} + P(tJ)P^{-1} + P\left(\frac{t^2}{2!}J^2\right)P^{-1} + P\left(\frac{t^3}{3!}J^3\right)P^{-1} + \cdots \\ &= P\left(I + (tJ) + \frac{t^2}{2!}J^2 + \frac{t^3}{3!}J^3 + \cdots\right)P^{-1} \\ &= Pe^{Jt}P^{-1}. \end{aligned}$$

Như vậy, khi ma trận A có các giá trị riêng phức, việc tính hàm e^{At} trở thành tính e^{Jt}. Phần tiếp theo, chúng ta nghiên cứu cách tính e^{Jt}. Để việc tính toán thuận lợi, chúng ta chọn J là ma trận Jordan cỡ 4×4 có dạng

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Khi đó, tính toán ta được

$$J^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, J^1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, J^2 = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$J^3 = \begin{bmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda & 1 \\ 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 & 3\lambda \\ 0 & 0 & \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^3 \end{bmatrix}, J^4 = \begin{bmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 & 4\lambda \\ 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 & 6\lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^4 \end{bmatrix}, J^5 = \begin{bmatrix} \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 & 10\lambda^2 \\ 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 & 10\lambda^3 \\ 0 & 0 & \lambda^5 & 5\lambda^4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^5 \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy các số hạng ở hàng đầu tiên của mỗi ma trận trên trùng với một vài số hạng đầu tiên trong khai triển $(\lambda + 1)^k$.

Khi đó, sử dụng cách biểu diễn hệ số trong nhị thức, chúng ta có hàng đầu tiên của J^k có dạng:

$$\left[\lambda^k \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \binom{k}{2}\lambda^{k-2} \binom{k}{3}\lambda^{k-3}\right]$$

và các hàng liên tiếp được tạo thành bằng cách thêm số 0 vào bên trái. Các phần tử dưới đường chéo chính của ma trận e^{Jt} đều bằng 0 . Các phần tử nằm trên đường chéo chính của ma trận e^{Jt} có dạng:

$$e^{Jt} = 1 + \lambda t + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \frac{1}{3!}(\lambda t)^3 + \cdots$$

Tiếp theo ta xét các phần tử thuộc đường chéo phía trên của đường chéo chính. Các phần tử trong ma trận J^k có dạng $k\lambda^{k-1}$. Khi đó tương ứng với các phần tử trong ma trận e^{Jt} là

$$0+t+\frac{1}{2!}t^2 2\lambda+\frac{1}{3!}t^3 3\lambda^2+\cdots+\frac{1}{k!}t^k k\lambda^{k-1}+\cdots=te^{\lambda t}.$$

Suy ra, e^{Jt} sẽ có dạng

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & ? & ?? \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & ? \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}.$$

Tương tự với các phần tử trong ma trận J^k mà có dạng $\binom{k}{2}\lambda^{k-2}$ sẽ tương ứng với các phần tử trong ma trận e^{Jt} là:

$$\begin{aligned} &0+0+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3 3\lambda+\frac{1}{4!}t^4 6\lambda^2+\frac{1}{5!}t^5 10\lambda^3+\cdots+\frac{1}{k!}t^k\frac{k(k-1)}{2!}\lambda^{k-2}+\cdots \\ &=\frac{t^2}{2!}\left(1+t\lambda+\frac{1}{2!}(t\lambda)^2+\frac{1}{3!}(t\lambda)^3+\cdots\right) \\ &=\frac{t^2}{2}e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Cuối cùng chúng ta sẽ thấy các phần tử ở góc trên cùng bên phải của ma trận J^k mà có dạng $\binom{k}{3}\lambda^{k-3}$ sẽ tương ứng với các phần tử trong ma trận e^{Jt} là

$$\begin{aligned} &0+0+0+\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{4!}t^4 4\lambda+\frac{1}{5!}t^5 10\lambda^2+\cdots+\frac{1}{k!}t^k\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}\lambda^{k-3}+\cdots \\ &=\frac{t^3}{3!}\left(1+t\lambda+\frac{1}{2!}(t\lambda)^2+\frac{1}{3!}(t\lambda)^3+\cdots\right) \\ &=\frac{t^3}{3!}e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

Như vậy, tổng kết lại chúng ta có

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

Với những khối Jordan khác nhưng có cấu trúc tương tự, chúng ta vẫn có cách làm giống như trên. Hàng đầu tiên của e^{Jt} có dạng

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda t} & \dots \end{bmatrix}.$$

Các hàng liên tiếp được hình thành bằng cách đẩy các số 0 vào hàng một từ bên trái. Nếu J là ma trận phức tạp nhưng vẫn có dạng Jordan chính tắc, tức là:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & J_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & J_m \end{bmatrix}$$

trong đó mỗi J_i là một khối Jordan đơn giản. Khi đó, quá trình tính toán cũng được tiến hành tương tự trên và ta thu được

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{J_3 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{J_m t} \end{bmatrix}.$$

Ví dụ 3.4. Xét ma trận ở Ví du 2.5, ma trận $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ta đã tìm được ma trận P và P^{-1} có dạng:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Khi đó, ta thu được $A = PJP^{-1}$, với $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ma trận J là ma trận có một khối Jordan cấp 2 và một khối Jordan cấp một. Khi đó,

$$e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = P\begin{bmatrix} e^{J_1 t} & 0 \\ 0 & e^{J_2 t} \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & -te^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

4. ỨNG DỤNG CỦA HÀM MA TRẬN MŨ

Phương trình vi phân đóng vai trò quan trọng, là cầu nối giữa toán học lý thuyết và toán học ứng dụng. Phương trình vi phân là nền tảng cho nhóm ngành lý thuyết ổn định, lý thuyết tối ưu điều khiển toán học - mảng nghiên cứu đã và đang phát triển mạnh mẽ. Trong phương trình vi phân, lớp phương trình đơn giản, có nhiều tính chất đẹp đẽ và quan trọng là hệ phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng, có dạng

$$x'(t) = Ax(t) \tag{1}$$

Việc giải hệ phương trình này đóng vai trò lớn trong việc nghiên cứu các tính chất định tính (bị chặn, liên tục, khả vi,...) của nghiệm, tính điều khiển được, tính ổn định hay ổn định hóa của hệ. Để giải hệ (1) ta xem xét định lý sau:

Định lí 4.1. ([2], tr 17) Cho hệ $x'(t) = Ax(t)$, A là ma trận cỡ n. Khi đó, hàm

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$$

là nghiệm duy nhất của hệ (1) với diều kiện $x(t_0) = x_0$.

Chứng minh:

Đầu tiên, ta chứng minh $x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0$ là nghiệm của hệ (1).

Trước hết, tính đạo hàm của e^{At} bằng định nghĩa [3]

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} = e^{tA}\lim_{h\to 0}\frac{e^{hA} - I}{h}$$
$$= e^{tA}A = Ae^{tA}$$

Nếu $\mathbf{x}(t) = e^{At}x_0$ thì

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d}{dt}(e^{At}\mathbf{x}_0) = Ae^{At}\mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}(t)$$

với mọi $t \in \mathbb{R}$. Mặt khác, $\mathbf{x}(0) = e^{A.0}\mathbf{x}_0 = I\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0$.

Như vậy, $\mathbf{x}(t) = e^{At}x_0$ là nghiệm của hệ (1).

Tiếp theo, ta chứng minh nghiệm này là duy nhất. Thật vậy, $x(t)$ là nghiệm bất kỳ của bài toán giá trị ban đầu (1) và đặt

$$\mathbf{y}(t) = e^{-At}\mathbf{x}(t).$$

Khi đó, tính đạo hàm của $y(t)$, sử dụng tính chất nghiệm của $x(t)$ và tính chất giao hoán của e^{-At} và A, ta thu được

$$\begin{aligned}\mathbf{y}'(t) &= -Ae^{-At}\mathbf{x}(t) + e^{-At}\mathbf{x}'(t)\\ &= -Ae^{-At}\mathbf{x}(t) + e^{-At}A\mathbf{x}(t)\\ &= 0 + 0\\ &= 0, \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Như vậy, $y(t)$ là là một hằng số. Cho $t = 0$ cho thấy rằng $y(0) = x_0$ nên $y(t) = x_0$ và do đó mọi nghiệm của bài toán giá trị ban đầu (1) đều được cho bởi

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{y}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$$

Định lý được chứng minh.

Ví dụ 4.1. Tìm nghiệm của hệ $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}$ với điều kiện $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$.

Theo Ví dụ 2.2, 2.3, 3.1 và Định lý 4.1, ta có nghiệm của hệ ban đầu là

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^t + e^{3t}) & \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t)\\ \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t) & \frac{1}{2}(e^t + e^{3t})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^t + e^{3t})\\ \frac{1}{2}(e^{3t} - e^t)\end{bmatrix}$$

là nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 4.2. Tìm nghiệm của hệ

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

với điều kiện

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

Theo Ví dụ 2.5, 3.2 và Định lý 4.1, ta có nghiệm của hệ ban đầu là

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} 2^t & 0 & 2^t \\ 0 & 0 & 0 \\ -2^t & -2^t.t & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.2^t \\ 0 \\ -2^t \end{bmatrix}$$

là nghiệm của hệ đã cho.

Ví dụ 4.3. Tìm nghiệm của hệ

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

với điều kiện

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Theo Ví dụ 2.6, 3.3 và Định lý 4.1, ta có nghiệm của hệ ban đầu là

$$x(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} e^t\cos t & -e^t\sin t \\ e^t\sin t & e^t\cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t\cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

là nghiệm của hệ đã cho.

5. KẾT LUẬN

Bài báo này đã nghiên cứu và mở rộng từ phương trình vi phân tuyến tính sang hệ phương trình vi phân tuyến tính với hàm số cần tìm có dạng $X(t) = Ce^{At}$. Vậy nên mấu chốt của bài toán là ta xác định được hàm mũ e^{At} . Từ đó giúp ta hình thành một số cách tìm hàm mũ và đồng thời ứng dụng nó trong việc giải phương trình vi phân. Ngoài ra, ta đã chứng minh được sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của hệ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Cung Thế Anh, (2015), *Cơ sở lý thuyết phương trình vi phân,* Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.

[2] Lawrence Perko, (1990), *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer.

[3] Edward R. Scheinerman, (2013), *Invitation to Dynamical Systems*, Dover Publications.

[4] Phan Hồng Trường, (2001), *Giáo trình đại số tuyến tính*, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội 2.

NÂNG CAO HIỆU QUẢ PHƯƠNG PHÁP GIẢNG DẠY THEO HƯỚNG TIẾP CẬN NĂNG LỰC NGƯỜI HỌC TRONG GIÁO DỤC NGHỀ NGHIỆP TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT NAM ĐỊNH

ThS. Nguyễn Đình Thi [1], ThS. Trần Quang Thịnh [2]

[1] Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Nam Định,
Email: thispkt@gmail.com
[2] Khoa Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Nam Định
Email: thinhspktnd@gmail.com

Tóm tắt: Hiện nay, để đạt tới trình độ giáo dục tương đương với khu vực cũng như thế giới thì phát triển giáo dục nghề nghiệp là yếu tố then chốt, được định hướng mở, có tính linh hoạt và theo xu thế phát triển, hiện đại, hiệu quả, hội nhập. Hơn nữa, cũng cần chú trọng cả quy mô, tổ chức đào tạo; đẩy mạnh hợp tác quốc tế. Thủ tướng Chính phủ đã ban hành Quyết định số 2239/QĐ-TTg phê duyệt Chiến lược phát triển giáo dục nghề nghiệp giai đoạn 2021-2030, tầm nhìn đến năm 2045, trong đó xác định rõ mục tiêu: "Phát triển nhanh giáo dục nghề nghiệp nhằm đáp ứng nhu cầu đa dạng của thị trường lao động, của người dân và yêu cầu ngày càng cao về số lượng, cơ cấu, chất lượng nhân lực có kỹ năng nghề cho phát triển đất nước trong từng giai đoạn". Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Nam Định là trường đào tạo các ngành nghề kỹ thuật vì thế cần bám sát nhu cầu của thị trường lao động gắn kết với việc làm thỏa đáng, an sinh xã hội và phát triển bền vững, bao trùm; phát huy tối đa năng lực, phẩm chất của người học; thúc đẩy khởi nghiệp, đổi mới sáng tạo. Để đạt được mục tiêu đó giáo dục Nhà trường cần nâng cao chất lượng giảng dạy theo hướng tiếp cận năng lực người học.

Từ khoá: *giáo dục nghề nghiệp, phương pháp giảng dạy, tiếp cận năng lực.*

1. Đặt vấn đề

Phương pháp giảng dạy theo hướng tiếp cận năng lực người học đã chứng minh được sự hiệu quả trong việc phát triển nguồn nhân lực chất lượng cao. Phương pháp này không chỉ tập trung vào việc truyền đạt kiến thức và kỹ năng, mà còn đặc biệt chú trọng vào việc phát triển những kỹ năng mềm, ý chí, ý thức trách nhiệm của người học.

Phương pháp giảng dạy này đưa người học vào trung tâm, làm chủ thể của hoạt động giảng dạy và học tập. Người học được khuyến khích tư duy sáng tạo, tham gia vào các hoạt động thực tế, trải nghiệm và tự học. Đồng thời, phương pháp này cũng tập trung vào việc rèn luyện năng lực giải quyết vấn đề, kỹ năng xã hội và kỹ năng nhân cách.

Thực tế cho thấy ở các trường Cao đẳng, Đại học nói chung không ít sinh viên còn chưa xác định rõ mục tiêu, lý tưởng, động cơ nghề nghiệp của mình, khả năng thích ứng với hoạt động học tập và rèn luyện nghề còn nhiều hạn chế, hầu hết sinh viên chưa được trang bị những tri thức cần thiết để hình thành và phát triển năng lực nghề nghiệp. Vì thế các bạn sinh viên gặp rất nhiều khó khăn trong quá trình học tập và rèn luyện, nhiều bạn còn băn khoăn hoang mang với sự lựa chọn nghề của mình. Điều đó ảnh hưởng không nhỏ đến hứng thú, kết quả học tập và rèn luyện nghề nghiệp của các bạn.

Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Nam Định với triết lý giáo dục "Nhân văn - Thụcc tiễn - Sáng tạo" và sứ mạng là cơ sở đào tạo, bồi dưỡng nhà giáo, cán bộ kỹ thuật có trình độ đại học và sau đại học theo hướng ứng dụng thuộc các lĩnh vực kỹ thuật, công nghệ, kinh tế;

nghiên cứu và triển khai các nhiệm vụ khoa học, công nghệ đáp ứng yêu cầu đổi mới giáo dục đào tạo, phát triển kinh tế - xã hội của đất nước, cuộc cách mạng công nghiệp 4.0 và khả năng hội nhập quốc tế. Trong khuôn khổ bài viết này, chúng tôi nghiên cứu việc tìm ra những cách thức phù hợp để nâng cao hiệu quả giảng dạy theo hướng tiếp cận năng lực (TCNL) tại Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Nam Định nhằm thực hiện từng bước đáp ứng yêu cầu cấp thiết của việc đổi mới trong giáo dục.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Khái niệm năng lực, năng lực nghề nghiệp

Năng lực là một thuộc tính tâm lý phức hợp, là điểm hội tụ của nhiều yếu tố như tri thức, kỹ năng, kỹ xảo, kinh nghiệm, sự sẵn sàng hành động và trách nhiệm. Trong quá trình dạy học, năng lực được hiểu là sự kết hợp tri thức, kĩ năng và thái độ. Mục tiêu bài học được cụ thể hóa thông qua các năng lực được hình thành. Nội dung kết hợp với hoạt động cơ bản nhằm hình thành nên năng lực trong mỗi một môn học. "Năng lực" (competency)- là một trong những thành tố quan trọng trong cấu trúc nhân cách. Có tác giả cho rằng: "Người có năng lực (NL) là người đạt hiệu suất và chất lượng hoạt động cao trong các hoàn cảnh khác nhau". Theo tác giả Phạm Minh Hạc, NL nói lên "người đó có thể làm gì, làm đến mức nào, làm với chất lượng ra sao. Thông thường người ta còn gọi là khả năng hay "tài"". Dưới góc độ GD học, chúng ta có thể xem xét NL là kết quả của quá trình GD, rèn luyện của cá nhân, thể hiện ở những kiến thức, kĩ năng và thái độ phù hợp để cá nhân có thể tham gia hiệu quả vào một lĩnh vực hoạt động nhất định. Như vậy, ở góc độ này, người có NL ở lĩnh vực nào thì nhất định phải có tri thức kĩ năng kĩ xảo trong lĩnh vực ấy, có thái độ tích cực để vận dụng tri thức kĩ năng hiệu quả vào các hoạt động. Tuy nhiên có tri thức, kĩ năng chưa thể khẳng định cá nhân có NL hay không, bởi tri thức kĩ năng ấy chưa chắc đã được hiện thực hóa trong hoạt động. Vậy NL dưới góc độ GD học được thể hiện ở kết quả hoạt động của cá nhân, khả năng vận dụng tri thức, kĩ năng để tham gia có hiệu quả trong một lĩnh vực hoạt động nhất định. NL có ý nghĩa lý luận và thực tiễn to lớn bởi "sự phát triển NL của mọi thành viên trong xã hội sẽ đảm bảo cho mọi người tự do lựa chọn một nghề nghiệp phù hợp với khả năng cá nhân, làm cho hoạt động của cá nhân có kết quả hơn,... và cảm thấy hạnh phúc khi lao động". Hiện nay, việc phát triển năng lực thông qua dạy học được hiểu đồng nghĩa với phát triển năng lực hành động. Dưới đây là mô hình cấu trúc năng lực:

Năng lực chuyên môn: Là khả năng thực hiện các nhiệm vụ về chuyên môn cũng như đánh giá kết quả một cách độc lập, có phương pháp và đảm bảo chính xác về mặt chuyên môn (bao gồm cả khả năng tư duy logic, phân tích, tổng hợp và trừu tượng; khả năng nhận biết các mối quan hệ thống nhất trong quá trình).

Năng lực phương pháp: Là khả năng đối với những hành động có kế hoạch, định hướng mục đích trong công việc giải quyết các nhiệm vụ và vấn đề đặt ra. Trọng tâm của năng lực PP là những PP nhận thức, xử lý, đánh giá, truyền thụ và giới thiệu.

Năng lực xã hội: Là khả năng đạt được mục đích trong những tình huống xã hội cũng như trong những nhiệm vụ khác nhau với sự phối hợp chặt chẽ với những thành viên khác.Trọng tâm của năng lực xã hội là ý thức được trách nhiệm của bản thân cũng như của những người khác, tự chịu trách nhiệm, tự tổ chức; có khả năng thực hiện các hành động xã hội, khả năng cộng tác và giải quyết xung đột.

Năng lực cá thể: Là khả năng suy nghĩ và đánh giá được những cơ hội phát triển cũng như những giới hạn của mình; phát triển được năng khiếu cá nhân cũng như xây dựng và thực hiện kế hoạch cho cuộc sống riêng; những quan điểm, chuẩn giá trị đạo đức và động cơ chi phối các hành vi ứng xử. Các thành phần năng lực "gặp nhau" tạo thành năng lực hành động.

Năng lực nghề nghiệp là sự tương ứng giữa những đặc điểm tâm lý và sinh lý của con người với những yêu cầu do nghề nghiệp đặt ra. Không có sự tương ứng này thì con người không thể theo đuổi nghề được. Năng lực nghề nghiệp vốn không có sẵn trong con người, không phải là những phẩm chất bẩm sinh. Nó hình thành và phát triển qua hoạt động học tập và lao động. Trong quá trình làm việc, năng lực này tiếp tục được phát triển hoàn thiện. Học hỏi và lao động không mệt mỏi là con đường phát triển năng lực nghề nghiệp.

Dạy học theo định hướng phát triển năng lực là phát triển năng lực hành động tức là khả năng thực hiện có trách nhiệm và hiệu quả các hành động, giải quyết các nhiệm vụ, các vấn đề trong những tình huống khác nhau trên cơ sở hiểu biết, kỹ xảo và kinh nghiệm cũng như sự sẵn sàng hành động. Như vậy năng lực người học cần đạt là cơ sở để xác định các mục tiêu, nội dung, hoạt động, phương pháp .....dạy học mà người dạy cần phải căn cứ vào đó để tiến hành các hoạt động giảng dạy và giáo dục (lấy người học làm trung tâm)

Chương trình dạy học theo định hướng phát triển năng là dạy học định hướng kết quả đầu ra, chú trọng năng lực vận dụng tri thức vào thực tiễn.

Dạy học theo định hướng phát triển năng lực là mô hình dạy học nhằm phát triển tối đa năng lực của người học, trong đó, người học tự mình hoàn thành nhiệm vụ nhận thức dưới sự tổ chức, hướng dẫn của người dạy. Quá trình giáo dục từ chủ yếu trang bị kiến thức sang phát triển toàn diện năng lực và phẩm chất người học trên nguyên lý:

- Học đi đôi với hành;
- Lý luận gắn với thực tiễn;
- Giáo dục nhà trường kết hợp với giáo dục gia đình và giáo dục xã hội.

2.2. Khái niệm tiếp cận năng lực

Tiếp cận theo năng lực là hướng tiếp cận hiện đại xây dựng mô hình giáo dục, đào tạo theo năng lực thực hiện.

Theo đó, kiến thức, kĩ năng, thái độ tích hợp trong chủ thể được giáo dục, đào tạo cũng như bồi dưỡg. Mô hình này rất phù hợp với mục tiêu giáo dục nói và đặc biệt, mô hình này rất phù hợp với các trường đại học, cơ sở đào tạo nghề. Kết quả đầu ra phải được xem xét đánh giá qua năng lực của người học. Từ đó, đòi hỏi các cơ sở giáo dục đào tạo phải xác định hệ chuẩn đầu ra để có thể đo đạc, lượng hóa chất lượng giáo dục, đào tạo theo tiếp cận năng lực. Tiếp cận năng lực được hiểu là nghiên cứu và vận dụng một số lý luận về đào tạo nghề nhằm hình thành năng lực cho người lao động lao động như một triết lý, nguyên tắc, một sợi dây xuyên suốt quá trình đào tạo giúp người học từng bước có được năng lực thể hiện qua hệ thống kỹ năng cốt lõi, kỹ năng chung.

Tiếp cận năng lực giúp người học không chỉ học thuộc, ghi nhớ mà còn phải biết làm thông qua các hoạt động cụ thể, sử dụng những tri thức học được để giải quyết các tình huống gắn với thực tiễn đời sống. Khi tổng kết các lý thuyết về tiếp cận dựa trên năng lực trong giáo dục, đào tạo và phát triển. Năm đặc tính cơ bản của tiếp cận này, đó là:

1. TCNL dựa trên triết lý người học là trung tâm.
2. TCNL thực hiện việc đáp ứng các đòi hỏi của chính sách.

3. TCNL là định hướng cuộc sống thật.

4. TCNL là rất linh hoạt và năng động.

5. Các tiêu chuẩn của năng lực được hình thành một cách rõ ràng.

Những đặc tính cơ bản này dẫn tới những ưu thế của tiếp cận dựa trên năng lực là:

- TCNL cho phép cá nhân hóa việc học: trên cơ sở mô hình năng lực, người học sẽ bổ sung những thiếu hụt của cá nhân để thực hiện những nhiệm vụ cụ thể của mình.

- TCNL chú trọng vào kết quả đầu ra.

- TCNL tạo ra những linh hoạt trong việc đạt tới kết quả đầu ra: theo những cách thức riêng phù hợp với đặc điểm và hoàn cảnh của cá nhân.

- TCNL còn tạo khả năng cho việc xác định một cách rõ ràng những gì cần đạt được và những tiêu chuẩn cho việc đo lường các thành quả. Việc chú trọng vào kết quả đầu ra và những tiêu chuẩn đo lường khách quan của những năng lực cần thiết để tạo ra các kết quả này là điểm được các nhà hoạch định chính sách giáo dục, đào tạo và phát triển nguồn nhân lực đặc biệt quan tâm nhấn mạnh.

Do những đặc tính và ưu điểm của tiếp cận dựa trên năng lực, các mô hình năng lực và những năng lực được xác định đã và đang đoợc xây dựng, phát triển, và sử dụng như là những công cụ cho việc phát triển rất nhiều chương trình giáo dục, đào tạo và phát triển khác nhau trên toàn thế giới.

Như vậy, TCNL là hướng đi đúng đắn cho giáo dục của mọi quốc gia. Mục đích là giúp cho người được giáo dục có các kiến thức, kỹ năng, thái độ cơ bản phù hợp với mức năng lực mà người học cần sau một giai đoạn hay quá trình giáo dục.

2.3. Biện pháp nâng cao hiệu quả phương pháp giảng dạy theo hướng tiếp cận năng lực người học

2.3.1. Đối với cơ sở giáo dục

- Đồng bộ hóa chương trình đào tạo và xây dựng chuẩn đầu ra với yêu cầu của thị trường lao động. Hàng năm Nhà trường rà soát chuẩn đầu ra ngành đào tạo đại học và sau đại học đáp ứng yêu cầu xã hội và yêu cầu ĐBCLGD và tiệm cận chuẩn chất lượng khu vực ASEAN. Từ đó, không ngừng cải tiến, đổi mới chương trình đào tạo phù hợp với yêu cầu xây dựng trường ĐHSPKT Nam Định trở thành trường đại học trọng điểm của khu vực Đồng bằng sông Hồng, hướng tới đạt chuẩn chất lượng quốc gia và khu vực.

- Tăng cường tổ chức các hoạt động nghiên cứu, giảng dạy, học tập, bồi dưỡng, hội thảo khoa học giúp đội ngũ giáo viên giáo dục nghề nghiệp nâng cao kỹ năng nghề nghiệp; đồng thời có chính sách động viên, khuyến khích đội ngũ nhà giáo giáo dục nghề nghiệp tích cực đổi mới, ứng dụng công nghệ số và các phương pháp giảng dạy hiện đại theo hướng tiếp cận năng lực người học để tổ chức các hoạt động giảng dạy ngày hiệu quả, nâng cao chất lượng giáo dục nghề nghiệp. Nhà trường thường xuyên tổ chức các buổi hội thảo, toạ đàm nhằm đề xuất các giải pháp thiết thực, hiệu quả để đổi mới cách thức dạy học hướng tới nâng cao năng lực và phát triển phương pháp giảng dạy cho giảng viên. Các buổi hội thảo, toạ đàm đã thu hút nhiều bài tham luận của các tác giả, đồng thời tạo cơ hội để các giảng viên chia sẻ kinh nghiệm cải tiến phương pháp giảng dạy. Hệ thống các phương pháp giảng dạy được thể hiện một cách cụ thể trong đề cương chi tiết học phần. Trong đó, các phương pháp giảng dạy được xây dựng, lựa chọn phù hợp nhất để chuyển tải từng nội dung đơn vị kiến thức của bài học.

- Tạo điều kiện cho học sinh, sinh viên tham gia các hoạt động ngoại khóa, thực tập và học tập kỹ năng mềm từ doanh nghiệp. Một nhân tố quan trọng trong nâng cao chất lượng giáo dục là tạo lập, duy trì môi trường học tập. Môi trường học tập tốt có thể kích thích sự hăng say, yêu thích và sự chủ động của người học, giúp họ khám phá và phát huy tốt nhất những khả năng vốn có của bản thân. Ý thức được tầm quan trọng đó, Trường ĐH SPKT Nam Định từ lâu đã đặc biệt xem trọng việc tạo dựng môi trường học tập tích cực nhằm hình thành, nuôi dưỡng thói quen không ngừng học tập cho người học, giúp họ đáp ứng được những yêu cầu ngày càng khắt khe đối với nguồn nhân lực của xã hội. Hằng năm, Nhà trường đều triển khai các hoạt động cho sinh viên kiến tập, thực tập giữa khoá, thực tập tốt nghiệp tại các doanh nghiệp, các cơ sở sản xuất giúp sinh viên có điều kiện trải nghiệm, tiếp cận thực tiễn, bổ sung kiến thức, kinh nghiệm, làm quen với môi trường làm việc của doanh nghiệp và khích lệ đam mê nghề nghiệp. Bên cạnh đó, để định hướng cho người học về công việc tương lai, giúp sinh viên thêm hiểu biết về co hội việc làm và thị trường lao động, Nhà trường thường xuyên tổ chức các buổi toạ đàm tư vấn hướng nghiệp để người học có định hướng lựa chọn công việc phù hợp với năng lực và nhu cầu của mình. Nhà trường đã ký kết các biên bản ghi nhớ hợp tác, kết nối với doanh nghiệp để mở rộng cơ hội việc làm cho sinh viên. Nhà trường luôn quan tâm tạo dựng môi trường học thuật cho người học, tạo không khí hứng khởi trong học tập và nghiên cứu. Trường thường xuyên phát động, tổ chức các phong trào, cuộc thi nghiên cứu khoa học, sáng tạo kỹ thuật trong sinh viên (Cuộc thi thiết kế video, Hội thi sáng tạo kỹ thuật điện - điện tử, Hội thi thiết kế mạch in trên máy tính, Cuộc thi Olympic Toán học sinh viên, Cuộc thi Đại sứ văn hoá đọc...) tạo sân chơi để sinh viên thể hiện năng lực sáng tạo và rèn luyện các kỹ năng trong nghiên cứu. Bên cạnh đó, các cuộc thi, các phong trào văn nghệ, thể thao do Đoàn Thanh niên Trường phát động cũng đóng góp không nhỏ vào việc tạoo dựng môi trường học tập lành mạnh, tăng cường sự gắn kết và chia sẻ giữa người học.

- Phát triển mạng lưới thư viện trong các cơ sở giáo dục nghề nghiệp, bảo đảm mỗi cơ sở giáo dục nghề nghiệp có đầy đủ và đa dạng các tài liệu học tập cho học sinh, sinh viên và tài liệu nghiên cứu, giảng dạy cho giáo viên. Phát triển kho học liệu số ở tất cả các trình độ, ngành nghề đào tạo, dùng chung trong toàn hệ thống và liên kết với quốc tế. Đầu tư nâng cấp các phòng thí nghiệm, xưởng thực hành ảo, thiết bị ảo, thiết bị tăng cường ở những ngành, nghề phù hợp, tạo môi trường giảng dạy và học tập thuận lợi phát huy năng lực của người học. Mỗi năm, Trường đều có kế hoạch bổ sung, làm phong phú thêm nguồn học liệu (giáo trình, khoá luận, đồ án, sách chuyên ngành, tài liệu tham khảo, báo, tạp chí...) và tổ chức các hoạt động, phát động các phong trào tạo không khí thi đua, hăng say tự học và tự đọc cho người học (tuần lễ đọc sách) biến thư viện thành trung tâm sinh hoạt văn hoá và khoa học của Trường.

- Việc đầu tư, nâng cấp trang thiết bị, kỹ thuật hiện đại theo công nghệ mới phục vụ giảng dạy cũng được Nhà trường hết sức lưu tâm. Các trang thiết bị phục vụ thường xuyên được sửa chữa, bảo trì, nâng cấp hoặc thay thế nhằm đảm bảo các phương tiện kỹ thuật cần thiết đáp ứng quá trình dạy học hướng tới đạt C. . Hằng năm, Nhà trường đều có kế hoạch kiểm kê tài sản và báo cáo số liệu căn cứ vào tình trạng thực tế của các thiết bị từ đó có kế hoạch đổi mới, nâng cấp phù hợp. Bên cạnh đó, Nhà trường cũng đưa vào sử dụng hiệu quả nhiều phần mềm hỗ trợ đào tạo, giảng dạy (phần mềm thi trắc nghiệm trực tuyến tin học - ngoại ngữ, các phần mềm dạy - học trực tuyến, các phần mềm thiết kế, trình chiếu bài giảng...).

2.3.2 Đối với giảng viên

- Nâng cao nhận thức về sự cần thiết của việc đổi mới nội dung và phương pháp giảng dạy. Trong lộ trình đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và đào tạo, có thể nói rằng giảng viên là yếu tố quyết định hàng đầu trong việc thực hiện đổi mới phương pháp giảng dạy. Giáo viên cần có kiến thức chuyên môn và kiến thức sư phạm về các đề tài thực hiện giảng dạy, phải có khả năng truyền tải những kiến thức vào chương trình giảng dạy, với lối trình bày giản dị, sáng tỏ, áp dụng vào bài làm, vào bài ôn tập, vào sự đánh giá cũng như các hoạt động khác của việc giảng dạy. Những điều trên kết hợp cùng với sự nhiệt tình trong giảng dạy chắc chắn sẽ truyền đạt kiến thức cho học sinh một cách hiệu quả và thành công hơn.

- Cập nhật kiến thức mới, áp dụng các phương pháp giảng dạy hiện đại và kỹ năng cốt lõi trong giảng dạy.

Giảng viên phải xác định được những vấn đề cần đổi mới. Giáo viên muốn đổi mới phương pháp dạy học thì phải xác định trước mục tiêu, nội dung, phương tiện, hình thức tổ chức và phương thức đánh giá giáo dục. Xây dựng kế hoạch bài dạy theo hướng phát triển phẩm chất, năng lực của người học là một sự đổi mới cần thiết cho quá trình đổi mới phương pháp dạy học.

Đặc biệt, giáo viên phải nắm vững kỹ năng truyền đạt kiến thức: nắm vững yêu cầu nội dung giáo dục, nắm vững kiến thức và kỹ năng cần truyền đạt đến học sinh để thiết kế dẫn dắt học sinh đi từ dễ đến khó, từ ít đến nhiều. Tài nghệ của giáo viên trong công tác giảng dạy cũng cần thiết không kém bất cứ một lĩnh vực sáng tạo nào khác. Nếu người giáo viên khéo léo phát huy tính tích cực, chủ động của học sinh thì con người đang chịu tác động của giáo dục sẽ trở thành chủ thể của giáo dục. Giáo viên hiện nay không còn là người truyền thụ kiến thức mà là người hỗ trợ học sinh tìm chọn và xử lý thông tin. Vị trí của nhà giáo không phải được xác định bằng sự độc quyền về thông tin và trí thức có tính đẳng cấp, mà bằng trí tuệ và sự từng trải của mình trong quá trình dẫn dắt học sinh tự học

- Khuyến khích đổi mới và sử dụng công nghệ số trong giảng dạy.

Giảng viên chủ động khai thác và phát huy hiệu quả vai trò của công nghệ thông tin vào hoạt động dạy học. Kiến thức cơ bản của các bài giảng cho các đối tượng có thể đưa lên mạng internet nội bộ và hướng dẫn, giới thiệu cho sinh viên nghiên cứu. Khi thực hành giảng bài trên lớp, giảng viên chỉ làm rõ những nội dung khó của lí thuyết, dành nhiều thời gian tập trung cho việc mở rộng, phân tích sâu phần vận dụng lí luận vào giải quyết các vấn đề thực tiễn đang đặt ra. Đa dạng hóa các hình thức dạy học, tăng cường hình thức dạy học hợp tác, dạy học theo nhóm, dạy học trực tuyến. Định hướng học viên tích cực tham gia hoạt động nghiên cứu khoa học. Thông qua nghiên cứu khoa học sẽ làm cho học viên hiểu rõ hơn bản chất nội dung học tập, kích thích họ phải tự giác, tích cực, chủ động, sáng tạo trong tìm tòi, nghiên cứu các vấn đề học tập. "Đẩy mạnh việc vận dụng phương pháp dạy học tích cực, hiện đại, ứng dụng công nghệ thông tin, kĩ thuật mô phỏng và cập nhật thông tin mới vào giảng dạy".

Trình độ, năng lực sư phạm của người giảng viên là yếu tố quan trọng, quyết định đến chất lượng, hiệu quả hoạt động giảng dạy và có tác động lớn đến phát huy tính tích cực học tập, rèn luyện của người học. Người giảng viên với vai trò chủ thể hoạt động sư phạm, vừa là người "kiến trúc sư” vừa là người "nghệ sĩ", "diễn viên", vừa thiết kế, vừa biểu diễn tạo sự hấp dẫn, lôi cuốn đối với người học. Người giảng viên cần phải gương mẫu, tiêu biểu về phẩm chất đạo đức, lối sống, tác phong và phương pháp công tác, thực sự là tấm gương sáng để người học học tập và noi theo.

Để có được phương pháp giảng dạy khoa học, hợp lí, người dạy rất cần đến kinh nghiệm, sự từng trải trong thực tiễn giảng dạy. Đây là yếu tố quan trọng giúp cho người giảng viên có những bài giảng hay, kích thích được tính tích cực của người học. Kinh nghiệm thực tiễn hoạt động đơn vị pháo binh, thực tiễn giảng dạy và hoạt động xã hội làm cho các bài giảng trở nên sinh động, thực tế và có tính thuyết phục hơn.Tránh được sự khô cứng, nhàm chán nhất là đối với các môn lí luận, các bài giảng lí thuyết. Quá trình giảng dạy, tổ chức học tập, người giảng viên còn truyền thụ kinh nghiệm cần thiết cho người học, nhất là các kinh nghiệm trong thực hiện các tiêu chuẩn kĩ thuật chuyên ngành pháo binh, kinh nghiệm trong tổ chức, quản lí và chỉ huy bộ đội. Qua đó, tạo niềm tin, động lực, cảm hứng cần thiết để người học tích cực trong học tập, rèn luyện.

2.3.3. Đối với sinh viên

- Nắm vững kiến thức chuyên ngành và các kỹ năng cần thiết cho công việc.

Đây là một trong những yếu tố quan trọng nhằm nâng cao hệu quả của phương pháp giảng dạy tiếp cận năng lực người học. Sinh viên khi đăng ký theo ngành học, cần được giảng viên chuyên ngành nói riêng và Khoa chuyên môn nói chung, truyền thụ tới sinh viên nắm được các thông tin cơ bản về ngành học như định hướng nghề nghiệp, yêu cầu chuyên môn, thuận lợi và khó khăn trong quá trình học tập cũng như nội dung cốt lõi của ngành sinh viên theo học.

Từ đó sinh viên nắm được cơ bản về thông tin ngành học và các kỹ năng cần thiết cho công việc sau khi tốt nghiệp. Bên cạnh đó, khi sinh viên nhận thấy được sự cần thiết của các kỹ năng cũng như kiến thức ngành học sẽ giúp quá trình dạy và học đạt được hiểu quả cao, nâng cao chất lượng giảng dạy và kết quả học tập của ính viên.

- Phát triển kỹ năng giao tiếp, làm việc nhóm và tự học. Đây là một trong những kỹ năng mềm mà Nhà trường chú trọng phát triển, xây dựng, hình thành cho sinh viên đạt yêu cầu của chuẩn đầu ra không chỉ trong từng học phần mà của cả chương trình đào tạo. Việc phát triển tốt kỹ năng giao tiếp, làm việc nhóm và tự học từ trong Nhà trường giúp sinh viên tự tin, chủ động tiếp cận kiến thức trong quá trình học tập và sau khi tốt nghiệp ra trường.

Trong quá trình học tập, kỹ năng làm việc đội nhóm sẽ giúp cho mỗi thành viên cùng nhau đóng góp ý kiến, suy nghĩ mới về nhiệm vụ được giao. Mỗi người cùng làm cùng nghĩ thì sẽ giúp nhóm có được nhiều thông tin, ý tưởng hấp dẫn hơn để có thể giải quyết bài tập được giao nhanh chóng và dễ dàng hơn.

Mỗi người làm một phần nhỏ ghép lại với nhau để hoàn thành bài tập lớn giúp mọi người đỡ bị stress và nâng cao hiệu suất học tập. Kỹ năng làm việc đội nhóm hiệu quả là giúp nhau tạo nên cảm hứng, hứng thú lấy lại tinh thần làm việc, khuấy động tinh thần mọi người cùng nhau cố gắng để vượt qua thử thách về bài tập, dự án nghiên cứu. Mỗi người một ý nghĩa, một cách hiểu rồi gộp lại với nhau sẽ tạo ra được ý tưởng lớn và hấp dẫn.

Trong quá trình làm việc đội nhóm, học sinh sẽ biết cách hỗ trợ, giúp đỡ nhau làm việc tốt hơn, cùng nhau tiến bộ và học hỏi những điều hay, điều tốt của mọi người xung quanh. Kỹ năng làm việc đội nhóm giúp mỗi sinh viên sẽ biết được điểm mạnh, điểm yếu của mình là gì để cùng khắc phục hạn chế và phát huy điểm mạnh của mình để đạt được kết quả chung cao nhất. Trong khi làm việc theo nhóm, tất cả các học sinh sẽ được đưa ra ý kiến, quan điểm của mình về bài tập, dự án hay hoạt động của Nhà trường đưa ra từ đó bạn sẽ nhận biết được mình đang mạnh ở đâu, thiếu sót gì để cải thiện lại bản thân tốt hơn.

Khi có kỹ năng làm việc đội nhóm sẽ rèn luyện cho mình được kỹ năng tạo lập mối quan hệ trong giao tiếp. Giúp sinh viên dễ kết nối với mọi người, hiểu nhau hơn và cùng nhau phối hợp nhịp nhàng giải quyết bài tập lớn chung với nhau. Kỹ năng giao tiếp cũng như tự học được hình thanh ngay trong đội nhóm thông qua các buổi thảo luận, họp nhóm, trao đổi ,..

Sinh viên sẽ được bày tỏ ý kiến của mình và tích lũy cách kinh nghiệm, kiến thức giao tiếp cơ bản cho bé về sau. Biết cách ứng xử, giao tiếp, thuyết trình trước đám đông hiệu quả.

- Xác định mục tiêu học tập đúng đắn và tự rèn luyện phương pháp học tập phù hợp với năng lực bản thân.

Kỹ năng xác định mục tiêu là khả năng nhận biết, xác định và thiết lập mục tiêu cụ thể, có thể đo lường, có thể đạt được, phù hợp với bản thân và có thời hạn. Kỹ năng này rất quan trọng trong việc giúp sinh viên định hướng, tạo động lực để phấn đấu và đạt được thành công.

Hơn nữa, việc xác định mục tiêu học tập đúng đắn giúp sinh viên dễ dàng lên kế hoạch, định hướng tốt cho quá trình trau dồi kiến thức, bổ sung kỹ năng, kinh nghiệm cho bản thân. Để có thể tập trung tốt cho việc học, nâng cao tinh thần tự chủ, phát triển tối đa tiềm lực của bản thân thì chúng ta cần phải xác định và thiết lập rõ mục tiêu dựa vào mong muốn, nhu cầu của chính mình.

Đối với sinh viên cao đẳng, đại học thì việc đặt mục tiêu học tập mang ý nghĩa quan trọng gấp nhiều lần so với những năm học trước. Cũng bởi, môi trường này đòi hỏi các bạn sinh viên phải có sự chủ động, tự giác trong việc học tập, tiếp thu kiến thức, trau dồi kỹ năng, kinh nghiệm. Nếu trong giai đoạn này các em hoàn toàn không có bất kỳ dự định, mục tiêu nào cho bản thân thì rất khó có thể học tập tốt, thậm chí nhiều trường hợp còn có thể chán nản, bỏ học giữa chừng. Thiếu mục tiêu học tập ở giảng đường đại học chính là lý do lớn nhất làm cho sinh viên cảm thấy chênh vênh, không thể tiếp tục thực hiện tốt chương trình học và khó đạt được những thành công trong tương lai.

Dưới đây là một số cách hiệu quả để giúp cho sinh viên dễ dàng thiết lập và duy trì mục tiêu học tập của bản thân từ đó có phương pháp học tập phù hợp với năng lực bản thân:

- Xác định về những mong muốn, kỳ vọng của bản thân;
- Liệt kê danh sách các mục tiêu cần thực hiện;
- Nêu ra những lý do kèm lợi ích khi đạt mục tiêu;
- Lên kế hoạch thực hiện cụ thể, chi tiết;
- Thực hiện mỗi ngày, ghi chép lại tiến trình;
- Tự thưởng cho bản thân;
- Tìm sự hỗ trợ.

Phương pháp giảng dạy theo hướng tiếp cận năng lực trong giáo dục nghề nghiệp được áp dụng triển khai giúp sinh viên đạt được những kỹ năng, mục têu trên và có nhiều cơ hội tham gia, trải nghiệm, tự học, tự nghiên cứu, tự khám phá sẽ cho pháp họ có thể lĩnh hội được những tri thức, hình thành tư duy đổi mới, sáng tạo, sự tự tin và ngày càng phát triển toàn diện nhân cách. Đây cũng chính là trong những mục tiêu cần đạt được để phát triển giáo dục nghề nghiệp, phát huy tối đa năng lực, phẩm chất của người học; thúc đẩy khởi nghiệp, đổi mới sáng tạo, nâng cao chất lượng nguồn nhân lực đáp ứng yêu cầu phát triển đất nước trong giai đoạn mới.

3. Kết luận

Phương pháp giảng dạy theo hướng tiếp cận năng lực không chỉ chú ý đến tính tích cực hoá cho người học về hoạt động trí tuệ mà còn chú ý rèn luyện năng lực giải quyết vấn đề gắn với những tình huống của cuộc sống và nghề nghiệp, đồng thời gắn hoạt động trí tuệ với hoạt động thực hành, thực tiễn. Phương pháp giảng dạy này có ưu điểm nhấn mạnh vào năng lực vận dụng tri thức, kiến thức của người học tiếp thu được từ người dạy vào thực tiễn; người học chủ động hơn trong học tập, có thể khám phá những tri thức mới ngoài kiến thức từ người dạy, hình thành thái độ tự học tập, tự nghiên cứu, phát triển kỹ năng, nhất là kỹ năng mềm, đáp ứng nhu cầu ngày càng cao của xã hội. Đồng thời, việc tăng cường học tập theo nhóm, trao đổi, tương tác giữa người dạy - người học có ý nghĩa quan trọng nhằm phát triển năng lực xã hội, phát triển năng lực giải quyết các vấn đề phức hợp, đáp ứng yêu cầu, nhu cầu của xã hội trong những tình huống thực tiễn. Kết quả nghiên cứu trên đây tạo cơ sở thuận lợi để thực hiện các tác động phù hợp và hiệu quả mục tiêu nâng cao hiệu quả của phương pháp giảng dạy theo hướng tiếp cận năng lực của người học tại Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Nam Định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Ban Chấp hành Trung ương (2013). *Nghị quyết số 29 - NQ/TW ngày 04/11/2013 về đổi mới căn bản, toàn diện Giáo dục và Đào tạo*. Hà Nội.

[2] Hoàng Hòa Bình (2015). *Năng lực và đánh giá theo năng lực*. Tạp chí Khoa học Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh 6(71): 21-31.

[3] Đặng Thành Hưng (2001), *Các lí thuyết và mô hình giáo dục hướng vào người học ở Phương Tây*. Viện khoa học Giáo dục.

[4] Nguyễn Trọng Khanh (2011), *Phát triển năng lực tư duy kĩ thuật*. NXB Đại học Sư phạm.

[5] Vũ Trọng Nghị (2009), Đào tạo theo TCNL thực hiện. Tạp chí giáo dục, số 41.

[6] Phạm Công Nhất (2014). *Đổi mới giáo dục đại học theo hướng hội nhập quốc tế ở nước ta hiện nay*. Tạp chí Lý luận chính trị 10: 53-58.

[7] Tài liệu tập huấn đổi mới kiểm tra đánh giá theo hướng tiếp cận năng lực học sinh các môn học, Vụ Giáo dục Trung học, Bộ Giáo dục và Đào tạo, năm 2014.

[8] Lê Đình Trung, Phan Thị Thanh Hội (2016), *Dạy học theo định hướng hình thành và phát triển năng lực người học ở trường phổ thông*. NXB Đại học sư phạm Hà Nội.

DẠY HỌC TÍCH HỢP LỊCH SỬ PHÁT TRIỂN LÝ THUYẾT TẬP HỢP VÀ CÁC HỆ THỐNG SỐ TRONG HỌC PHẦN GIẢI TÍCH 1

TS. Phạm Thị Trang [1]
[1] Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Dương
Email: phamtrangsph@gmail.com

Tóm tắt

Bản báo cáo trình bày một số kinh nghiệm trong việc dạy học tích hợp lịch sử phát triển lý thuyết tập hợp và các hệ thống số trong học phần Giải tích 1.

Từ khóa: *tập hợp, hệ thống số, số thực.*

Đặt vấn đề

Một trong những cách bồi dưỡng tình yêu, niềm đam mê với môn Toán là hiểu được lịch sử, những ứng dụng thực tế của chúng. Vì vậy, trong quá trình dạy học, việc tích hợp Lịch sử phát triển tập hợp và các hệ thống số trong nội dung tập hợp và tập hợp số thực thuộc học phần Giải tích 1 có thể là một cách hiệu quả để giúp sinh viên hiểu sâu hơn về các khái niệm toán học cơ bản và thêm hứng thú với môn học. Đây là một phương pháp giảng dạy tích cực, kết hợp giữa kiến thức lịch sử và các khái niệm toán học, giúp sinh viên không chỉ hiểu rõ về mặt lý thuyết mà còn thấy được quá trình phát triển và ứng dụng của các khái niệm này trong lịch sử Toán học.

Nội dung chính

1. Một số kiến thức lịch sử về tập hợp và các hệ thống số trong chương trình Giải tích 1

1.1. Tập hợp

Từ thời cổ đại, con người đã bắt đầu có những nhận thức về tập hợp, mặc dù chưa phát biểu được một cách đầy đủ, chính xác. Ví dụ, cách họ so sánh số lượng của một đối tượng nào đó với một tập hợp chuẩn mà họ đã biết rõ số lượng như Mặt trời, đôi mắt, các ngón tay trên một bàn tay, ... hay cách người Hy Lạp cổ đại đã sử dụng các đối tượng như sỏi hoặc đá để đếm và nhóm chúng lại thành các tập hợp.

Lý thuyết tập hợp được sáng lập bởi Georg Cantor trong những năm 1874 đến năm 1897. Thay cho thuật ngữ "tập hợp", ban đầu ông đã sử dụng những từ như "biểu hiện" (inbegriff) hoặc "sự đa dạng" (Mannigfaltigkeit)...

Ngoài Cantor, Richard Dedekind là một nhà tiên phong quan trọng của lý thuyết về lý thuyết tập hợp. Ông đã nói về các "hệ thống" thay vì tập hợp và phát triển một cấu trúc lý thuyết tập hợp của các số thực vào năm 1872 và tiên đề hóa lý thuyết tập hợp các số tự nhiên năm 1888.

Sau đó, ngay từ năm 1889, Giuseppe Peano, miêu tả tập hợp là các tầng lớp, đã xây dựng các phép toán tập hợp, cùng với tiên đề Peano, tạo cơ sở cho bộ môn số học. Ông chính là người đã tạo ra cơ sở cho ngôn ngữ công thức ngày nay của lý thuyết tập hợp và giới thiệu nhiều biểu tượng được phổ biến ngày nay, đặc biệt là ký hiệu $\in\in$, được đọc là là "phần tử của". Trong đó, $\in\in$ chính là chữ viết thường của ε (epsilon) của từ ἐστί (tiếng Hy Lạp có nghĩa là "là")....

Cứ như vậy, lý thuyết tập hợp ngày càng được phát triển và hoàn thiện cho đến ngày nay.

Ngôn ngữ của lý thuyết tập hợp được dùng trong định nghĩa của gần như tất cả các đối tượng toán học, như hàm số, và các khái niệm lý thuyết tập hợp được đưa vào nhiều chương trình giảng dạy toán học. Các kiến thức cơ bản về tập hợp và phần tử trong tập hợp có thể được giới thiệu từ cấp tiểu học, cùng với sơ đồ Venn, để học về tập hợp các đối tượng vật lý thường gặp. Sau đó, các phép toán cơ bản như hợp, giao các tập hợp được học trong chương trình THCS và THPT. Các khái niệm cao hơn như lực lượng của tập hợp sẽ được giới thiệu trong chương trình toán học của sinh viên đại học.

Như vậy, lý thuyết tập hợp, được hình thức hóa bằng lôgic bậc nhất (first-order logic), là phương pháp toán học nền tảng thường dùng nhất để xây dựng các lý thuyết khác. Ngoài việc sử dụng nó như một hệ thống nền tảng, lý thuyết tập hợp bản thân nó cũng là một nhánh của toán học, với một cộng đồng nghiên cứu tích cực. Các nghiên cứu mới nhất về lý thuyết tập hợp bao gồm nhiều loại chủ đề khác nhau, từ cấu trúc của dòng số thực đến nghiên cứu tính nhất quán của bản số lớn.

Trong chương trình Giải tích 1, sinh viên được nhắc lại các kiến thức cơ bản về tập hợp, cụ thể là các khái niệm về phần tử thuộc tập hợp, các cách xác định tập hợp, sơ đồ Venn, mối quan hệ giữa các tập hợp, các phép toán tập hợp và các tính chất của chúng.

1.2. Phép đếm và các hệ thống số tự nhiên

Phép đếm và các hệ thống số đã xuất hiện từ rất lâu và phát triển qua nhiều giai đoạn lịch sử khác nhau. Không ai có thể nói được đích xác từ khi nào loài người biết đến các con số. Người ta tìm được một văn bản cổ khắc trên đá cách đây khoảng 6000 năm trong đó các con số biểu thị bằng các dấu chấm và gạch. Ta không thể tưởng tượng được ra một xã hội phát triển mà không có những con số. Con số chính là một sản phẩm của trí tuệ loài người, được đặt ra để giải quyết những nhu cầu bức xúc thực tế của con người.

Các con số không phải ra đời ngay cùng một lúc. Ban đầu, người ta chỉ biết đến những con số nhỏ 1, 2, 3, ... Dần dần, do nhu cầu của cuộc sống, họ đặt ra các số lớn hơn. Đặc biệt, số 0 lại là số ra đời sau cùng, vào thế kỷ thứ IX. Và đến tận thế kỷ thứ XVII, số 0 mới được xếp ngang hàng với các số khác.

Khi mới ra đời, các con số cũng chưa có hình dạng như ngày nay. Cách ghi số hiện nay do người Hindu (Ấn Độ) phát minh vào thế kỷ thứ VIII và thứ IX, sau đó, được người Ả Rập truyền sang châu Âu. Trước đó, có nhiều cách ghi số khác nhau, tiêu biểu như hệ ghi số Ai Cập (từ khoảng 3400 năm TCN), hệ ghi số Babilon (ra đời cùng khoảng thời gian với hệ ghi số Ai Cập), hệ ghi số Maya (khoảng 2000 năm TCN) và hệ ghi số La Mã, vẫn còn được sử dụng cho đến ngày nay.

1.3. Sự phát triển của các hệ thống số

Số tự nhiên ra đời do những yêu cầu thực tiễn đời sống và sản xuất. Nhưng số tự nhiên dần không đủ đáp ứng những yêu cầu của xã hội loài người ngày càng phát triển.

Số âm được đề cập trong các công trình của các nhà Toán học Ấn Độ vào đầu thời kỳ Trung cổ và chỉ đến thế kỷ thứ XVI sau Công nguyên, người ta mới hết nghi ngờ về giá trị thực sự của nó. Số âm ra đời đầu tiên là để giải quyết các vấn đề Toán học thuần túy, để đảm bảo rằng mọi phép trừ luôn thực hiện được, sau đó, được ứng dụng rộng rãi trong thực tế đời sống, để biểu đạt các đại lượng có hai chiều như nhiệt độ trên 0 và dưới 0, độ cao trên mực nước biển và dưới mực nước biển, lãi và lỗ...

Số hữu tỷ dương ra đời từ rất sớm, trước cả số âm, vào khoảng năm 1550 TCN, do các nhu cầu bức bách của đời sống sản xuất về đo đạc, phân chia... Mặt khác, do yêu cầu nội tại của Toán học, để đảm bảo cho mọi phép chia cho một số nguyên khác 0 đều thực hiện được, tập hợp số hữu tỷ ra đời. Tập hợp số hữu tỷ cùng với phép cộng và nhân lập thành một trường, gọi là trường số hữu tỷ.

Tuy nhiên, tập hợp số hữu tỷ vẫn chưa đáp ứng được đầy đủ các yêu cầu của thực tiễn. Từ xa xưa, người ta đã thấy có những đoạn thẳng không có độ dài là số hữu tỷ, ví dụ như đường chéo của hình vuông có cạnh bằng 1. Vì vậy, xuất hiện nhu cầu mở rộng số hữu tỷ. Số vô tỷ được coi như được nhắc đến đầu tiên trong "Kinh điển Sulba" từ những năm 600 TCN. Khái niệm về số vô tỷ cũng được các nhà toán học Ấn Độ đầu tiên chấp nhận một cách ngầm định từ những năm 750 - 690 TCN, khi họ nhận thức được rằng căn bậc hai của một số số nhất định như 2 và 61 không thể được xác định chính xác. Khoảng 500 TCN, các nhà toán học Hy Lạp do Pythagoras làm lãnh đạo nhận ra sự cần thiết của các số vô tỷ, đặc biệt là sự vô tỷ của căn bậc hai của 2.

Tập hợp bao gồm các số hữu tỷ và số vô tỷ được gọi là tập số thực. Có nhiều hướng xây dựng lý thuyết về tập hợp số thực. Phương pháp được giới thiệu trong chương trình Giải tích 1 sử dụng định lý về nhát cắt Dedekind. Phương pháp này dựa trên hình ảnh trực quan như sau: ta đã biết, mỗi số tự nhiên, số nguyên âm hay thậm chí số hữu tỷ đều có thể biểu diễn được tương ứng với một điểm trên trục số. Nhưng, một điểm bất kì trên trục số có phải là đại diện của một số hữu tỷ hay không? Nếu không, thì nó là loại số nào? Từ đó, ta có định lý về nhát cắt Dedekin và xây dựng được trường số thực.

2. Phương pháp dạy học tích hợp Lịch sử tập hợp và các hệ thống số trong chương trình Giải tích 1

Khi dạy về tập hợp và tập hợp số thực trong Giải tích 1, việc tích hợp lịch sử có thể được thực hiện như sau:

- Giới thiệu lịch sử và sự phát triển của lý thuyết tập hợp, từ những bước đầu tiên trong lịch sử toán học cổ đại đến các mốc phát triển qua các thời kỳ, đến sự phát triển đầy đủ của lý thuyết tập hợp hiện đại như ngày nay.

- Giới thiệu các nhà toán học nổi bật, có công lớn trong việc phát triển và xây dựng lý thuyết tập hợp như Georg Cantor, người đã phát triển lý thuyết tập hợp hiện đại vào cuối thế kỷ 19, Richard Dedekind, một nhà tiên phong quan trọng của lý thuyết về lý thuyết tập hợp, là người đầu tiên tạo ra công thức tiên đề Axiom of extensionality của lý thuyết tập hợp; Giuseppe Peano, người xây dựng các phép toán tập hợp và đề xuất ra kí hiệu “thuộc” $\in$,...

- Giới thiệu về lịch sử phát triển các hệ thống số: Trước khi bắt đầu giảng dạy về tập hợp và tập hợp số thực, giảng viên có thể giới thiệu về lịch sử phát triển các hệ thống số, từ hệ thống số cổ đại đến hệ thống số hiện đại; thảo luận về các hệ đếm của các nền văn minh cổ đại, chẳng hạn như các hệ đếm của người Ai Cập, Babylon, Maya, La Mã; giới thiệu hệ thống số tự nhiên và sự phát triển của nó qua các nền văn minh khác nhau; giải thích sự ra đời của các số nguyên, số hữu tỷ, số thực và nhu cầu sử dụng chúng trong đời sống hàng ngày, bao gồm các ví dụ lịch sử.

Phép đếm và các hệ thống số đã xuất hiện từ rất lâu và phát triển qua nhiều giai đoạn lịch sử khác nhau. Việc hiểu về lịch sử phát triển của các hệ thống số sẽ giúp sinh viên:

+ Nhận thức được tầm quan trọng của các khái niệm toán học.

+ Hiểu rõ hơn về lý do và cách thức mà các khái niệm này được phát triển và ứng dụng.

+ Thấy được sự liên kết giữa toán học và các lĩnh vực khác trong đời sống.

- Giới thiệu các nhà toán học nổi bật, có công lớn trong việc phát triển và xây dựng lý thuyết số thực như Pythagore, Simon Stevin, người tạo ra cơ sở cho ký hiệu thập phân hiện đại, Descartes, người đã giới thiệu thuật ngữ "thực" để mô tả nghiệm của một đa thức, phân biệt chúng với những nghiệm "ảo", Évariste Galois (1832), người đã tạo ra lý thuyết Galois; Georg Cantor (1873), người đã đưa ra định nghĩa đầy đủ đầu tiên về số thực, Richard Dedekind và Karl Weierstrass với những đóng góp to lớn của họ trong việc phát triển lý thuyết số thực.

- Liên hệ giữa lịch sử, thực tiễn và các khái niệm toán học: Khi giảng dạy về các khái niệm như tập hợp, số thực, số hữu tỷ, và số vô tỷ, giảng viên có thể liên hệ với các ví dụ lịch sử để sinh viên thấy rõ hơn về ứng dụng và sự phát triển của các khái niệm này, đưa ra các ứng dụng thực tiễn của các khái niệm toán học trong cuộc sống hàng ngày và khoa học.

- Sử dụng các bài tập và ví dụ liên quan đến lịch sử: Giảng viên có thể sử dụng các ví dụ, thiết kế các bài tập mà sinh viên phải nghiên cứu và giải quyết các vấn đề liên quan đến lịch sử phát triển của các khái niệm toán học để minh họa và củng cố kiến thức.

- Sử dụng tài liệu và tài nguyên lịch sử: Sử dụng các tài liệu và tài nguyên lịch sử, chẳng hạn như các bản thảo cổ đại và các bài viết của các nhà toán học nổi tiếng, để minh họa các khái niệm toán học.

- Phương pháp liên môn: Tích hợp các nội dung lịch sử và toán học để tạo ra các bài giảng phong phú và hấp dẫn.

- Học qua dự án: Khuyến khích sinh viên tham gia vào các dự án nghiên cứu về lịch sử toán học, từ đó khám phá sâu hơn về sự phát triển của các khái niệm toán học.

KẾT LUẬN

Dạy học tích hợp Lịch sử phát triển phép đếm và các hệ thống số trong nội dung tập hợp và tập hợp số thực thuộc học phần Giải tích 1 không chỉ giúp sinh viên nắm vững kiến thức toán học mà còn giúp họ hiểu rõ hơn về bối cảnh lịch sử và sự phát triển của các khái niệm này. Điều này làm cho việc học toán trở nên thú vị và có ý nghĩa hơn, khuyến khích sinh viên khám phá sâu hơn về môn học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Cang, *Lịch sử Toán học,* NXB Trẻ, 1999.

[2] Nguyễn Văn Khuê, *Giải tích toán học (Tập 1),* NXB ĐHSP, 2002

[3] Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, Hoàng Quốc Toàn, *Giáo trình Giải tích (Tập 1),* NXB ĐHQGHN, 2000.

[4] Nguyễn Tiến Tài, Cơ sở Số học, NXB ĐHSP, 2007

[5] Vũ Tuấn, *Giáo trình giải tích toán học (Tập 1),* NXB GD, 2011.

DẠY HỌC MÔN GIẢI TÍCH CHO SINH VIÊN NGÀNH SƯ PHẠM TOÁN ĐÁP ỨNG CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018

TS. Vũ Quốc Tuấn [1]

[1] Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Hải Dương

MỞ ĐẦU

- Nội dung chính của báo cáo là gì ?

Một cách tiếp cận xây dựng nội dung môn Giải tích để giảng dạy cho sinh viên ngành sư phạm toán của Đại học Hải Dương.

- Căn cứ vào đâu để có cách tiếp cận trên ?

Dựa trên mục tiêu đào tạo; năng lực đầu vào, chuẩn đầu ra và nghề nghiệp của phần lớn sinh viên ngành sư phạm toán sau khi tốt nghiệp.

- Phương pháp tiếp cận để xây dựng nội dung môn Giải tích như thế nào ?

Tìm hiểu nội dung Giải tích trong chương trình GDPT môn toán 2018, tìm hiểu SGK môn toán từ lớp 6 đến lớp 12 (*của các 3 bộ sách giáo khoa hiện hành: Cánh Diều, Kết nối tri thức với cuộc sống, Chân trời sáng tạo*) và thực tiễn dạy học ở phổ thông. Trên cơ sở tìm hiểu các nội dung trên, báo cáo đề xuất cơ sở để xây dựng nội dung môn Giải tích sao cho phù hợp với thực tiễn giảng dạy.

I. KẾT QUẢ TÌM HIỂU

1. Nội dung Giải tích trong chương trình GDPT môn Toán 2018

Từ lớp 6 đến lớp 10: Học sinh chưa học Giải tích.

Lớp 11:

<table>
<tr><td>Giới hạn. Hàm số liên tục</td><td>- Giới hạn của dãy số. Phép toán giới hạn dãy số. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn.
- Giới hạn của hàm số. Phép toán giới hạn của hàm số.
- Hàm số liên tục.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Yêu cầu cần đạt:
- Nhận biết được khái niệm giới hạn của dãy số.
- Giải thích được một số giới hạn cơ bản như: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^k}=0 (k\in N^*)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0(|q|<1)$, $\lim\limits_{n\to+\infty}c=c$ với c là hằng số.
- Vận dụng được các phép toán giới hạn dãy số để tìm giới hạn của một số dãy số đơn giản (ví dụ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+1}}{n}$).
- Tính được tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và vận dụng được kết quả đó để giải quyết một số tình huống thực tiễn giả định hoặc liên quan đến thực tiễn.</td></tr>
<tr><td>Hàm số mũ và hàm số lôgarit</td><td>- Phép tính lũy thừa với số mũ nguyên, số mũ hữu tỉ, số mũ thực. Các tính chất.
- Phép tính lôgarit. Các tính chất.
- Hàm số mũ. Hàm số lôgarit.
- PT, Bất PT mũ và lôgarit.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Yêu cầu cần đạt:
(Chương trình GDPT 2018, môn Toán 11)</td></tr>
<tr><td>Đạo hàm</td><td>- Khái niệm đạo hàm. Ý nghĩa hình học của đạo hàm.
- Các quy tắc tính đạo hàm.
- Đạo hàm cấp hai.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Yêu cầu cần đạt:
(Chương trình GDPT 2018, môn Toán 11)</td></tr>
</table>

Lớp 12:

<table>
<tr><td>Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số</td><td>- Tính đơn điệu của hàm số.
- Giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.
- Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.
- Ứng dụng đạo hàm để giải quyết một số vấn đề liên quan đến thực tiễn.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Yêu cầu cần đạt:
(Chương trình GDPT 2018, môn Toán 11)</td></tr>
<tr><td>Nguyên hàm.
Tích phân</td><td>- Nguyên hàm. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp.
- Tích phân. Ứng dụng hình học của tích phân.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Yêu cầu cần đạt:
(Chương trình GDPT 2018, môn Toán 11)</td></tr>
</table>

2. Nội dung Giải tích thể hiện trong các bộ SGK hiện hành

Bộ sách	Lớp 11	Lớp 12
Cánh diều	**Tập 1:** - Giới hạn. Hàm số liên tục **Tập 2:** - Hàm số mũ và hàm số lôgarit - Đạo hàm	**Tập 1:** - Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số **Tập 2:** - Nguyên hàm. Tích phân
Kết nối tri thức với cuộc sống	**Tập 1:** - Giới hạn. Hàm số liên tục **Tập 2:** - Hàm số mũ và hàm số lôgarit - Đạo hàm	**Tập 1:** - Ứng dụng đạo hàm để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số **Tập 2:** - Nguyên hàm. Tích phân
Chân trời sáng tạo	**Tập 1:** - Giới hạn. Hàm số liên tục **Tập 2:** - Hàm số mũ và hàm số lôgarit - Đạo hàm	**Tập 1:** - Ứng dụng đạo hàm để khảo sát hàm số **Tập 2:** - Nguyên hàm. Tích phân
Nhận xét chung: Thứ tự sắp xếp nội dung thống nhất; bộ sách nào cũng có ưu, nhược điểm riêng (từ góc nhìn của giáo viên). Cần kết hợp ưu điểm của cả 3 bộ sách.		

3. Kinh nghiệm từ thực tiễn dạy học ở phổ thông

Phần lớn học sinh có năng lực và phẩm chất chưa tốt, thể hiện qua:

+ *Thái độ học tập*: chưa chăm chỉ, chưa tự giác, lười động não, thiếu động cơ học tập.

+ *Kiến thức*: bập bõm, mất gốc, không có hệ thống; đặc biệt là không hiểu bản chất của bài học.

+ *Kỹ năng giải toán*: chậm; không biết cách phân tích, trình bày lời giải; đặc biệt kém ở kỹ năng biến đổi biểu thức đại số, phân biệt các tập hợp số, tính nhẩm,...

II. ĐỀ XUẤT CƠ SỞ ĐỂ XÂY DỰNG NỘI DUNG MÔN GIẢI TÍCH

1. Cấu trúc mỗi bài dạy (tỉ lệ % theo thời lượng)

20% giảng viên giáo dục về thái độ học tập cho sinh viên	**50%** giảng viên chuyển tải kiến thức và hướng dẫn kỹ năng cho SV, trong đó: * **30%**: gắn liền với nghề nghiệp ở phổ thông. * **20%**: định hướng, nâng cao ở đại học. (*còn lại giao nhiệm vụ cho SV tự học*)	**30%** giảng viên cho sinh viên rèn kỹ năng và thảo luận

2. Cơ sở xây dựng nội dung môn Giải tích

Xây dựng dựa trên nền tảng nghề nghiệp của sinh viên sau khi tốt nghiệp, bám sát chương trình GDPT môn Toán 2018, các bộ SGK hiện hành và những thay đổi trong quá trình triển khai thực hiện chương trình.

III. MINH HỌA CẤU TRÚC MỘT BÀI DẠY

Tên bài: GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Thời lượng dự kiến: 3 tiết

I. MỤC TIÊU

1. Thái độ: Sự kiên trì (Câu chuyện của danh thủ bóng đá CR7)

2. Yêu cầu cần đạt:

- Nhận biết được khái niệm giới hạn của dãy số.

- Giải thích được một số giới hạn cơ bản như: $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^k} = 0 (k \in N^*)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0 (|q| < 1)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} c = c$ với c là hằng số.

- Vận dụng được các phép toán giới hạn dãy số để tìm giới hạn của một số dãy số đơn giản (ví dụ $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2n+1}{n}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{4n^2+1}}{n}$).

- Tính được tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn và vận dụng được kết quả đó để giải quyết một số tình huống thực tiễn giả định hoặc liên quan đến thực tiễn.

- CLO1. Trình bày được khái niệm giới hạn hữu hạn của dãy số.

- CLO3. Áp dụng lý thuyết giới hạn vào tính giới hạn của dãy số.

- CLO12. Phát triển kỹ năng giải toán sơ cấp ở trường phổ thông.

- CLO14. Phát triển kỹ năng sử dụng ngôn ngữ toán học trong học tập và giảng dạy toán ở trường phổ thông.

II. CHUẨN BỊ

Chương trình môn Toán 2018, SGK Toán 11, Giáo trình Giải tích 1 (lưu hành nội bộ), máy tính, máy chiếu, ...

III. TÌM HIỂU NỘI DUNG BÀI HỌC Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG

1. Giảng viên yêu cầu sinh viên tìm hiểu nội dung giới hạn của dãy số trong chương trình GDPT môn Toán năm 2018, trong SGK Toán 11

2. Giảng viên yêu cầu SV tổng kết kiến thức cơ bản của bài học + thảo luận

3. Hướng dẫn sinh viên giải bài tập trong SGK, SBT

IV. NGHIÊN CỨU VỀ GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ (Đại học)

1. Khái niệm cơ bản
2. Phép toán các dãy hội tụ
3. Tính chất
4. Dấu hiệu hội tụ của dãy số
5. Hai bổ đề quan trọng
6. Giới hạn trên và giới hạn dưới

V. NHIỆM VỤ VỀ NHÀ

1. Hoàn thiện giải bài tập trong SGK và SBT.

2. Là một giáo viên toán trong tương lai, anh/chị sẽ tổ chức dạy học bài Giới hạn của dãy số cho học sinh lớp 11 như thế nào ?

3. Các yêu cầu, nhiệm vụ về tự học, bài tập nâng cao (ở đại học).

ON ASYMPTOTIC 1-PERIODIC POLYNOMIALLY BOUNDED SOLUTIONS TO FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ThS. Nguyễn Ngọc Viên [1], PGS.TS. Nguyễn Dương Toàn [2]

[1] Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Dương
Email: uhdviennguyen.edu@gmail.com
[2] Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Phòng

Abstract

We study the asymptotic behavior of solutions of fractional differential equations of the form $D_C^\alpha u(t) = Au(t) + f(t)$ $(*)$, where $D_C^\alpha u(t)$ is the derivative of the function u in Caputo's sense, A is unbounded closed linear operator, f is n-asymptotic 1-perioidc, i.e. it is polynomially bounded and $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t+1)-f(t)}{(1+t)^n} = 0$. We will prove that equation $(\,^*)$ has n-asymptotic 1-perioidc solution if and only if it has a bounded uniformly continuous asymptotic solution on $\mathbb{R}^+$. The results in this paper will extend and improve results in V.T. Luong and N.V. Minh (Semigroup Forum, 2021). The obtained result extends known results on periodicity of solutions to fractional equations.

Key word

Key words and phrases. Asymptotic behavior, polynomial boundedness, stability, spectrum of a function on the half line.

The authors are grateful to the anonymous referee for his carefully reading the manuscript and useful suggestions.

1. Introduction

Let us consider the following linear fractional differential equations the form

$$D_C^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), u(0) = x, 0 < \alpha \leq 1 \tag{1.1}$$

where $D_C^\alpha u(t)$ is the derivative of the function u in the Caputo's sense, A is a linear operator which may not be bounded and f is n-asymptotic 1-perioidc that is defined above. We deal with the asymptotic behavier of solutions of equation 1.1 by looking for conditions in which some or all solution $u(.) are n$ - asymptotic 1 periodic. As is well known, a theorem of Massera [3] will showed as an analog of this theorem. Since these equations enable us to simulate complex systems, fractional differential equations have attracted the attention of many academics in recent years. Nonlocal relations in both space and time can be taken into consideration in the model created utilizing these equations. Fractional differential equations have been widely used in engineering as a result of these characteristics. For a description of applications in physics and engineering, we recommend the reader to the monographs [18,23]. For general results and concepts in abstract spaces the reader is referred to [5,13,14]. In recent years the asymptotic behavior of mild solutions of fractional differential equations are extensively studied. Among many results we would like to mention [16,20,24,25] that deal with existence, uniqueness of mild solutions as well as their asymptotic behavior. Due to N.V. Minh and V.T. Luong [22] studied on stability of C_0-semigroups which is extended a famous result [1,26] in the general unbounded case. In this paper, we would like to extend a famous result of the Massera Thoerem by using new concept that we call n - asymptotic 1 - periodic. The main results say that A to be closed linear operator which generates a C_0-semigroup, $\{\lambda^\alpha : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ and $e^{\Sigma_i(A,\alpha)} \setminus \{1\}$ is closed, and f is asymptotic 1-periodic. Then, if Eq.(3.4) has an asymptotic 1perioidc solution if and only if it has a bounded uniformly continuous asymptotic solution on $\mathbb{R}^+$(Theorem 3.6). Moreover, if $\sigma(P) \subset \{1\}$, then every asymptotic mild solution in $BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ of Eq.(1.1) is asymptotic 1-periodic. In [22], to have results on strong stability of solutions to fractional equations it is provided that the spectral set $\Sigma(A,\alpha) \cap i\mathbb{R}$ is countable, where $\Sigma(A,\alpha)$ is defined to be the set of complex numbers ξ such that $\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$ is analytic in a neighborhood of ξ, and u satisfies some ergodic conditions with zero means. If we assume that A generate a exponentially stable semigroup and $\{\lambda^\alpha : \operatorname{Re}\lambda > 0\} \subset \rho(A), e^{\Sigma_i(A,\alpha)} \setminus \{1\}$ is closed, and f is asymptotic 1-periodic in the sense $\lim_{t\to\infty}(f(t+1) - f(t)) = 0$. Then, if Eq.(3.4) has an asymptotic 1-periodic solution if and only if it has a bounded uniformly continuous asymptotic solution on $\mathbb{R}^+$. In this paper, we just asume A to be closed linear operator which generates a C_0-semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ bouded. The result obtained maybe new and it is an analog of Massera Theorem for this class of equations based on the technique of decomposition.

2. Preliminaries and Notations

2.1. Notations. Throughout this paper we will denote by $\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{C}$ the real line $(-\infty,\infty)$, half line $[0,+\infty)$ and the complex plane. We denote by $BC(\mathbb{R}+,\mathbb{X})$ the space of all bounded continuous functions from $\mathbb{R}+$ to a Banach space $\mathbb{X}$ with supremum norm and $BUC(\mathbb{R}+,\mathbb{X})$ is its subspace consisting of all uniformly continuous functions. Below we denote

$$g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, t > 0, \alpha > 0$$

For a complex number z, $\operatorname{Re} z$ denotes its real part. In this paper the single valued power function λ^α of the complex variable λ is uniquely defined as $\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha e^{i\alpha\arg(\lambda)}$, with $-\pi < \arg(\lambda) < \pi$.

For a fixed integer $n \geq 0$ we denote

$$BC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}) : \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{\| f(t) \|}{(1+t)^n} < \infty \right\}$$

equipped with the norm

$$\| f \|_n := \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{\| f(t) \|}{(1+t)^n} \tag{2.1}$$

Definition 2.1. We say that a function $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{X}$ is n-uniformly continuous if it is continuous and

$$\lim_{h\downarrow 0} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{\| f(t+h) - f(t) \|}{(1+t)^n} = 0 \tag{2.2}$$

Then, putting

$BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) := \{f \in BC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) : f$ is n-uniformly continuous function $\}$

Lemma 2.2. [22]

i) $BC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ with norm $\| f \|_n$ becomes a normed space.

ii) The normed space $(BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}), \|\cdot\|_n)$ is complete, so it is a Banach space.

2.2. Fractional differentiation in Caputo's sense. Let $\alpha > 0, t \geq a$, and a is a fixed number. Then, the fractional operator

$$J_a^\alpha u(t) := (g_\alpha * u)(t) = \int_a^t g_\alpha(t-\tau)u(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

is called fractional Riemann-Liouville integral of degree α. The function

$$D_C^\alpha u(t) := \begin{cases} J^{n-\alpha}u^{(n)}(t) = \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \displaystyle\int_a^t \dfrac{u^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}^* \\ u^{(n)}(t), & \alpha = n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

is called the fractional derivative in Caputo's sense of degree α. By this notation we have for $0 < \alpha \leq 1$

$$J_a^\alpha D_C^\alpha u(t) = u(t) - u(a)$$

2.3. Cauchy Problem. For a fixed $0 < \alpha \leq 1$, consider the Cauchy problem

$$D_C^\alpha u(t) = Au(t), u(0) = x \tag{2.4}$$

where A is generally an unbounded linear operator.

The well-posedness of (2.4) is equivalent to that of the problem

$$u(t) = x + \int_0^t g_\alpha(t-s)Au(s)ds \tag{2.5}$$

The reader is referred to the monograph [31] for an extensive study of the wellposedness of this kind of equations when A is generally an unbounded operator. Recent extensions for more general equations can be found in [20] and their references for more details.

Let us consider inhomogeneous linear equations of the form

$$D_C^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), t \geq 0 \tag{2.6}$$

Definition 2.3. A mild solution u of Eq.(2.6) on $\mathbb{R}^+$ is a continuous function on $\mathbb{R}^+$ such that, for each $t \in \mathbb{R}^+, J^\alpha u(t) \in D(A)$ and

$$u(t) = AJ^\alpha u(t) + J^\alpha f(t) + u(0)$$

Example 2.4. [22] Let $f \in BC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. If its derivative f' is also an element of $BC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, then, $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$

Lemma 2.5. [22] For each $t \geq 0$, we have

$$\| S(t) \|_n \leq (1+t)^n \tag{2.7}$$

2.4. A Spectral Theory of Polynomially bounded Functions. We note that for every function $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ its Laplace transform

$$\mathcal{L}f(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt$$

exists for any $\Re\lambda > 0$, so the definition of the spectrum $Sp_+(f)$ as the set of all reals ξ_0 such that its Laplace transform has no analytic extension to any neighborhood of $i\xi_0$ as in [2] can be formally extended to $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$.

The problem is how this spectrum can control the asymptotic behavior of the function f on the half line $\mathbb{R}^+$ is not clear due to the unboundedness of polynomially bounded functions f. In what follows we will discuss an approach to the concept of spectrum of f and how under some further "ergodic" conditions it controls the behavior of the functions $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$. We will begin with the translation semigroup $(S(t)_{t\geq 0})$ in $BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$, i.e., $S(t)f := f(t+\cdot)$ for each $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$.

Let $\mathcal{D}$ denote the differentiation operator d/dt in $BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ with domain $D(\mathcal{D}) = \{f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}): \exists f', f' \in BUC_n(\mathbb{R},\mathbb{X})\}$

Lemma 2.6. [22] The following assertions are valid:

i) The translation semigroup $(S(t)_{t\geq 0})$ in $BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ is strongly continuous;

ii) The infinitesimal generator $\mathcal{G}$ of $(S(t)_{t\geq 0})$ is the differentiation operator $\mathcal{D}$ in $BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$.

Operator $\tilde{\mathcal{D}}$. Throughout the paper we will use the following notation

$$C_{0,n}(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}) := \left\{f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}): \lim_{t\to\infty} \| f(t) \|/(1+t)^n = 0\right\}$$

It is easy to see that $C_{0,n}(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ is a closed subspace $BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$, and is invariant under the translation semigroup $(S(t)_{t\geq 0})$. In the space $BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ we introduce the following relation R :

$$fRg \text{ if and only if } f - g \in C_{0,n}(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}) \tag{2.8}$$

This is an equivalence relation and the quotient space $\mathbb{Y} := BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})/R$ is a Banach space. We will also denote the norm in this quotient space $\mathbb{Y}$ by $\|\cdot\|_n$ if it does not cause any confusion.

The class containing $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ will be denoted by $\tilde{f}$. Define $\tilde{\mathcal{D}}$ in $\mathbb{Y} = BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})/R$ as follows:

$$D(\tilde{\mathcal{D}}) := \{\tilde{f} \in \mathbb{Y}: \exists u \in \tilde{f}, u \in D(\mathcal{D})\} \tag{2.9}$$

If $f \in D(\tilde{\mathcal{D}})$, we set

$$\tilde{\mathcal{D}}\tilde{f} := \widetilde{\mathcal{D}u} \tag{2.10}$$

for some $u \in \tilde{f}$. The following lemma will show that this $\tilde{\mathcal{D}}$ is well defined as an operator in $\mathbb{Y}$.

Lemma 2.7. [22] With the above notations, $\tilde{\mathcal{D}}$ is a well defined single valued linear operator in $\mathbb{Y}$.

For each given $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ consider the following complex function $\hat{f}(\lambda)$ in λ defined as

$$\hat{f}(\lambda) := (\lambda - \bar{\mathcal{D}})^{-1}\bar{f} \tag{2.11}$$

Lemma 2.8. [22] $\hat{f}(\lambda)$ exists as an analytic function of λ in the region $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Moreover, the following inequality is valid

$$\|(\lambda - \bar{\mathcal{D}})^{-1}\bar{f}\|_n \leq \frac{e^{Re\lambda}\Gamma(n+1, \operatorname{Re}\lambda)}{(\operatorname{Re}\lambda)^{n+1}} \| \bar{f} \|_n \text{, for all Re } >> 0 \tag{2.12}$$

$$\|(\lambda - \bar{\mathcal{D}})^{-1}\bar{f}\|_n \leq \frac{\| f \|_n}{|\operatorname{Re}\lambda|}\text{, for all Re } < 0 \tag{2.13}$$

where

$$\Gamma(a,x) := \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}dt, a, x \geq 0$$

Definition 2.9. Let n be a fixed natural number, and let $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. The set of all points $\xi_0 \in \mathbb{R}$ such that $\hat{f}(\lambda)$ has no analytic extension to any neighborhood of $i\xi_0$ is defined to be the spectrum of f, denoted by $\sigma_n(f)$

Circular spectra of functions on the half line. Many of the concepts and results in this subsection are discussed and proved in [21].

Consider the translation operator S in $BC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ defined as

$[Sf](\xi) := f(1 + \xi),\ \xi \geq 0, f \in BC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$

Then, S induces operators in $\mathbb{Y}$ that will be denoted by $\bar{S}$. It is well known that $\bar{S}$ is an isometry, so $\sigma(\bar{S}) \subset \Gamma$.

For each $f(\cdot) \in BC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ let us consider the complex function $\mathcal{S}f(\lambda)$ in $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ defined as

$\mathcal{S}f(\lambda) := R(\lambda, \bar{S})\bar{f},\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$

where $R(\lambda, \bar{S}) := (\lambda - \bar{S})^{-1}$.

Lemma 2.10. We have the following estimate:

$$\| \mathcal{S}f(\lambda) \| \leq \frac{\| \bar{f} \|}{|1 - |\lambda||}, |\lambda| \neq 1 \tag{2.14}$$

Definition 2.11. The circular spectrum of a function $f(\cdot) \in BC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is defined to be the set of all $\xi_0 \in \Gamma$ such that $\mathcal{S}f(\lambda)$ has no analytic extension into any neighborhood of ξ_0 in the complex plane. This spectrum of $f(\cdot)$ is denoted by $\sigma(f)$. We will denote by $\rho(f)$ the set $\Gamma \setminus \sigma(f)$.

The following lemma justifies the introduction of these concepts of circular spectra.

Lemma 2.12. Let $f(\cdot) \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Then, for each $f(\cdot) \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$,

$\sigma(Qf) \subset \sigma(f)$

provided that Q is an operator in $\mathbb{Y}$ that commutes with $\bar{S}$ and leaves $C_{0,n}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ invariant.

Proof. The proof can be taken from that of [21, Lemma 2.5].

In the same lines as in [27] the following version of a Gelfand's Theorem can be obtained:

Lemma 2.13. Assume that $\bar{x}$ is any point in $\mathbb{Y}$, and the complex function $\mathcal{S}x(\lambda)$ has the point $\lambda = \xi_0 \in \Gamma$ as an isolated singular point. Then, ξ_0 is either a removable singular point or a pole of first order.

Below we will show that the spectrum of a function $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ can be determined as the spectrum of a linear operator. Let us define $\mathcal{M}_f$ as the closure of the linear space spanned by the set $\{\tilde{S}(t)f : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{Y}$. Obviously $\bar{S}(t)$ leaves $\mathcal{M}_f$ invariant for every $t \in \mathbb{R}$. We consider the C_0-group of isometries $\left\{\tilde{S}\big|_{\mathcal{M}_f}, t \in \mathbb{R}\right\}$. The generator of this group will be denoted by $\tilde{\mathcal{D}}\big|_{\mathcal{M}_f}$.

Lemma 2.14. For each $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$, we have

$$i \cdot sp(f) = \sigma\left(\tilde{\mathcal{D}}\big|_{\mathcal{M}_f}\right) \tag{2.15}$$

In the same way as [11, Lemma 2.7] we can show that

Lemma 2.15. For $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$, the following is valid

$$\sigma(f) = \sigma\left(\tilde{S}(1)\big|_{\mathcal{M}_f}\right) \tag{2.16}$$

Corollary 2.16. For $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ we have

$$\sigma(f) = \overline{e^{i \cdot sp(f)}} \tag{2.17}$$

where the overlining means the closure in the topology of the complex plane.

Proof. Since $\tilde{S}(t), t \in \mathbb{R}$ is a C_0-group of isometries, by the Weak Spectral Mapping Theorem (see e.g. [11, Theorem 3.16 , p. 283]) the identity (2.17) is valid.

3. MAIN RESULTS

Definition 3.1. Let p be a given real number in $[0,2\pi)$ and $n \geq 0$ be a fixed integer, we say that a function $g \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ is an asymptotic Bloch 1-periodic function of type p if

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t+1) - e^{ip} g(t)}{(1+t)^n} = 0$$

If $p = 0$, an asymptotic Bloch 1-periodic function g of type p will be called an asymptotic 1-periodic function. When $p = \pi$ we call the function asymptotic anti 1-periodic.

In [36] it is proved that a function $g \in BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ is an asymptotic Bloch 1-periodic function of type p if and only if $\sigma_n(g) \subset \{e^{ip}\}$. In the following another characterization is given in term of spectrum $sp(f)$ as in many circumstances it is easier to estimate this spectrum than $\sigma_n(f)$.

Theorem 3.2. Let $g \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$. Then,

i) If ξ_0 is an isolated point in $\sigma_n(g)$, then $i\xi_0$ is either removable or a pole of $\hat{g}(\lambda)$ of order less than $n+1$;

ii) If $\sigma_n(g) = \emptyset$, then $g \in C_{0,n}(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$;

iii) $\sigma_n(g)$ is a closed subset of $\mathbb{R}$;

iv) Let $g \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$. Then $\sigma_n(g) \subset \{e^{ip}\}$ if and only if g to be an asymptotic Bloch 1-periodic function of type p.

Proof. For the proofs of (i), (ii) and (iii) see [22]. For (iv) note that g to be an asymptotic Bloch 1-periodic function of type p, this means

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t+1) - e^{ip}g(t)}{(1+t)^n} = 0 \tag{3.1}$$

We have to prove $\sigma_n(g) \subset \{e^{ip}\}$. Indeed, from (3.1), we have $Sg - e^{ip}g = y$ where $y \in C_{0,n}(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$. Therefore,

$$(\lambda - e^{ip})R(\lambda,S)g = R(\lambda,S)y + g \tag{3.2}$$

Because of $y \in C_{0,n}(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ so that $\sigma_n(y) = \emptyset$. As $\lambda \neq e^{ip}$, equation (3.2) becomes

$$R(\lambda,S)g = \frac{1}{\lambda - e^{ip}}(g + R(\lambda,S)y)$$

Thus, $R(\lambda,S)g$ is analytic for all $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{e^{ip}\}$. Therefore, $\sigma_n(g) \subset \{e^{ip}\}$. Next, assume that $\sigma_n(g) \subset \{e^{ip}\}$. Using (3.2), we obtain

$$R(\lambda,S)y = (\lambda - e^{ip})R(\lambda,S)g - g, \text{ where } y = Sg - e^{ip}g \tag{3.3}$$

Since e^{ip} is an isolated singular point of $R(\lambda,S)g$ by Lemma ?? the complex function $\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto R(\lambda,S)(Sg - e^{ip}g)$ is extendable analytically at $\lambda = e^{ip}$, so it is an entire function. By definition, as $\sigma(Sg - e^{ip}g) = \emptyset$ by Part (ii), or $Sg - e^{ip}g \in C_{0,n}(\mathbb{R}+,\mathbb{X})$. In other words, (3.1) is valid.

3.1. Asymptotic behavior of solutions of fractional differential equations. We are going to apply the spectral theory of n-bounded functions in the previous section to study the asymptotic behavior of mild solutions to fractional differential equations of the form

$$D_C^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), u(0) = x \tag{3.4}$$

where α is a fixed number, $0 < \alpha \leq 1, A$ is a closed linear operator in a complex Banach space $\mathbb{X}, f$ is an element of $BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$. Recall that a mild solution u on $\mathbb{R}^+$ is defined to be a continuous function u on $\mathbb{R}^+$ such that, for each $t \in \mathbb{R}^+$, $J^\alpha u(t) \in D(A)$ and

$$u(t) = AJ^\alpha u(t) + J^\alpha f(t) + x \tag{3.5}$$

for all $t \in \mathbb{R}^+$.

Definition 3.3. A function $u \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ is said to be an asymptotic mild solution of Eq.(3.4) if there exists a function $\epsilon(\cdot) \in C_{0,n}(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ such that u is a mild solution of the equation

$$D_C^\alpha u(t) = Au(t) + f(t) + \epsilon(t), t \geq 0 \tag{3.6}$$

Now we consider the formulas of S_α and P_α, which are given in [13,37] :

$$S_\alpha(t) = \int_0^\infty \Phi_\alpha(s) T(t^\alpha s) ds$$
$$P_\alpha(t) = \alpha \int_0^\infty s\Phi_\alpha(s) T(t^\alpha s) ds$$

where Φ_α is a probability density function defined on $(0,\infty)$, that is, $\Phi_\alpha(t) \geq 0$ and $\int_0^\infty \Phi_\alpha(t)dt = 1$. From Lemma 3.2 in [37], we get that $S_\alpha(t)$ and $P_\alpha(t)$ are linear and bounded operators. By the subordination principle (see [13]), S_α and P_α, $\alpha \in (0,1]$, exist if A generates a C_0-semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$.

Thus, we assume that $A: D(A) \subset \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ is a closed linear operator which generates a C_0 -semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ in $\mathbb{X}$ and $\{\lambda^\alpha : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$. Next, taking the Laplace transforms of both sides of (3.4) gives

$$\hat{u}(\lambda) = \hat{S}_\alpha(\lambda)x + \left(\widehat{(\cdot)^{\alpha-1}P}\right)(\lambda) \cdot \hat{f}(\lambda) \tag{3.7}$$

where $\widehat{(\cdot\, \alpha^{\alpha-1}}P_\alpha(\lambda) = (\lambda^\alpha - A)^{-1}, \hat{S}_\alpha(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$. The inversion of the Laplace transform shows that $u(t)$ has the following form

$$u(t) = S_\alpha(t)x + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)f(s)ds \tag{3.8}$$

Hence, asymptotic mild solutions of (3.4) are defined as functions $u \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ satisfy

$$u(t) = S_\alpha(t)x + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)(f(s) + \epsilon(s))ds, t \geq 0 \tag{3.9}$$

3.2. Estimate of the spectrum of an n-bounded solution. Below we will denote by $\rho(A,\alpha)$ the set of all $\xi_0 \in \mathbb{C}$ such that $(\xi_0^\alpha - A)$ has an inverse $(\xi_0^\alpha - A)^{-1}$ that is analytic in a neighborhood of ξ_0, and by $\Sigma_i(A,\alpha) := i\mathbb{R} \setminus \rho(A,\alpha)$.

We state the following lemma that is the key tool for our study in this paper.

Lemma 3.4. For each function $u \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ as a mild solution of Eq. (3.4) on $\mathbb{R}^+$, and $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ the following estimate is valid:

$$i\sigma_n(u) \subset \Sigma_i(A,\alpha) \cup i\sigma_n(f) \tag{3.10}$$

Proof. Putting $Ff(t) := \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t-s)f(s)ds$ then we will proof $\bar{F}$ is actually commutative with $\bar{S}$. Indeed,

$$(SFf)(t) = Ff(t+1)$$
$$= \int_0^{t+1} (t+1-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t+1-s)f(s)ds$$
$$= \int_1^{t+1} (t+1-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t+1-s)f(s)ds + \int_0^1 (t+1-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t+1-s)f(s)ds$$
$$= F_\alpha Sf(t) + h(t),$$

where $h(t) = \int_0^1 (t+1-s)^{\alpha-1}P_\alpha(t+1-s)f(s)ds$. Note that, A is the (unbounded) linear operator which generates a strongly continuous semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ in a Banach space $\mathbb{X}$

then P_α (.) is linaer and bounded operator (see [37, Lemmas 3.3 and 3.4]). Hence,

$$\| h(t) \| = \left\| \int_0^1 (t+1-s)^{\alpha-1} P_\alpha (t+1-s) f(s) ds \right\|$$
$$\leq M \| f \| \int_0^1 (t+1-s)^{\alpha-1} ds$$
$$= C \frac{1}{\alpha} [(t+1)^\alpha - t^\alpha]$$

it means that $h \in C_{0,n}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ and $\bar{F}$ commutes with $\bar{S}$. By Lemma 2.12, $\sigma(\bar{F}\bar{f}) \subset \sigma(\bar{f})$. From (3.7) and by [22, Lemmas 4.1 and 4.2], the lemma is proved.

The main results of this paper are the following:

Theorem 3.5. Assume that $\Sigma_i(A,\alpha) \subset 2i\pi\mathbb{Z}(\Sigma_i(A,\alpha) \subset (2\mathbb{Z}+1)i\pi$, respectively) and $\sigma_n(f) \subset 2\pi\mathbb{Z}(\sigma_n(f) \subset (2\mathbb{Z}+1)\pi$, respectively). Then, every asymptotic mild solution of Eq.(3.4) is an asymptotic 1 -periodic solution (an asymptotic anti 1 -periodic solution, respectively).

Proof. By Lemma 3.4 for every asymptotic mild solution $u \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ has the property that

$i \cdot \sigma_n(u) \subset \Sigma_i(A,\alpha) \cup i \cdot \sigma_n(f)$

Therefore, $\sigma_n(u) \subset 2\pi\mathbb{Z}$ if both $\Sigma_i(A,\alpha) \cup i \cdot \sigma_n(f)$ are parts of $2i\pi\mathbb{Z}$, so by Theorem 3.2, u is asymptotic 1-periodic. The case of asymptotic anti 1-periodicity is treated in the same manner.

Theorem 3.6. Assume that A closed linear operator which generates a C_0-semigroup, $\{\lambda^\alpha : \mathrm{Re}\,\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ and $e^{\Sigma_i(A,\alpha)} \setminus \{1\}$ is closed, and f is asymptotic 1-periodic. Then, if Eq.(3.4) has an asymptotic 1-perioidc solution if and only if it has a bounded uniformly continuous asymptotic solution on $\mathbb{R}^+$.

Proof. Consider the operator

$L\tilde{u} := \tilde{u} - \left(\tilde{A}\tilde{J}^\alpha \tilde{u} + \tilde{J}^\alpha \tilde{f}\right)$

It is clear that $u \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is an asymptotic mild solution of Eq.(3.4) if and only if $L\tilde{u} = 0$. Set $\Lambda := e^{\Sigma_i(A,\alpha)} \cup \{1\}, \Lambda_1 := e^{\Sigma_i(A,\alpha)} \setminus \{1\}$ and $\Lambda_2 := \{1\}$. Then, by the assumption Λ_1 and Λ_2 are two disjoint closed subset of the unit circle Γ. By Lemma 3.4 and Corollary 2.16, $\sigma(u) \subset \Lambda$. Moreover, by [36, Assertion (iii), Proposition 3.4] there exists a projection $P: \mathbb{Y}_\Lambda \to \mathbb{Y}_{\Lambda_2}$ that commutes with any bounded operator that commutes with $\tilde{S}$. therefore, as $\tilde{S}L = L\tilde{S}$, we have $PL = LP$. Consequently,

$$0 = PL\tilde{u}$$
$$= LP\tilde{u}$$
$$= P\tilde{u} - \left(\tilde{A}\tilde{J}^\alpha P\tilde{u} + \tilde{J}^\alpha \tilde{f}\right)$$

That means, $P\tilde{u}$ contains an asymptotic mild solution of Eq.(3.4). Since $P\tilde{u} \in \mathbb{Y}_{\Lambda_2}$, therefore, $\sigma(P\tilde{u}) \subset \{1\}$. By Theorem 3.2, this solution is asymptotic 1-periodic and polynomially bounded.

Remark 3.7. The above theorem is an analog version of the famous result in [3] for fractional differential equations. Another analog for asymptotic anti-1-periodic solutions can be obtained by using the set $\{-1\}$ instead of $\{1\}$ in the statements of the theorem.

3.3. Examples

Example 3.8. Consider the initial value problem

$$\begin{cases} D_t^\alpha u(x,t) = au_{xx}(x,t) + f(x,t),\ x \in \Omega = (0,\pi), t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{3.11}$$

where $D_t^\alpha u(x,t)$ is the fractional derivative in Caputo's sense in t of degree $\alpha \in (0,1), u(x,t), f(x,t)$ are scalar-valued functions such that $f(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$ for each $t \in \mathbb{R}^+, f: \mathbb{R}^+ \ni t \mapsto f(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$ is uniformly continuous and bounded, and and $a > 0$ is given. We define the space $\mathbb{X} := L^2(\Omega)$ and $A: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ by the formula

$$\begin{cases} Ay = ay'' \\ D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \end{cases} \tag{3.12}$$

Problem 3.11 can be rewritten in the form of an evolution equation

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), t \in \mathbb{R}^+, u(0) = u_0 \tag{3.13}$$

where $u(t) \in \mathbb{X}, A$ is defined as above. As is well known the spectrum of A consists of eigenvalues that satisfy this equation

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} = \dfrac{1}{a}\lambda u & \text{in } \Omega \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

This implies

$$\lambda_n = -an^2, u_n = C\sin(nx), n \in \mathbb{N}$$

Furthermore, A generates a C_0-semigroup $S(t)$ with

$$\| S(t) \| \leq M, \forall t \geq 0$$

According to the subordination principle, A generates the subordinated resolvent $S_\alpha(t), \alpha \in (0;1)$ such that $\|S_\alpha(t)\| \leq M, \forall t \geq 0$ (see [37, Lemma 3.2 and 3.3]). By definition,

$$\Sigma_i(A,\alpha) = \{\lambda \in i\mathbb{R}: (\lambda^\alpha - A)^{-1} \text{ does not exists as a bounded operator } \}$$

As

$$\lambda^\alpha \in \sigma(A) \Leftrightarrow \lambda^\alpha = -an^2, n = 1,2,..$$

we have

$$\lambda^\alpha = |\lambda|^\alpha \cdot e^{i\alpha\arg\lambda}$$

$$\lambda^\alpha = -an^2 = an^2e^{i\pi}, n = 1,2,..$$

this is equivalent to

$$\begin{cases} |\lambda|^\alpha = an^2, n = 1,2,.. \\ \arg\lambda = \dfrac{\pi}{\alpha} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\lambda| = a^{\frac{1}{\alpha}}n^{\frac{2}{\alpha}}, n = 1,2,.. \\ \arg\lambda = \dfrac{\pi}{\alpha} \end{cases}$$

If the choices are $\alpha = \frac{2}{3}, a = \sqrt[3]{\pi^2}$, we get:

$\lambda_n = n^3 \pi e^{i \cdot \frac{3\pi}{2}} = -in^3\pi, n = 1,2,..$

Therefore

$\Sigma_i(A, 2/3) = \{-in^3\pi, n = 1,2,..\}$

and

$e^{\Sigma_i(A,2/3)} = \{1\} \cup \{-1\}$

If $f(\cdot, t)$ is asymptotic 1-periodic in t, then $e^{i \cdot sp(f)} = \{1\}$. Therefore, by Theorem 3.5, there is an asymptotic 1-periodic solution u of (3.13) if and only if there exists an asymptotic mild solution to Eq.(3.13). Similar conclusions can be made if f is asymptotic 1-anti-periodic. This is an analog of Massera Theorem for the fractional differential equation (3.13).

Example 3.9. We consider Problem 3.11 again with different values of α to illustrate a Katznelson-Tzafriri type result. We will assume that α is a number that satisfies

$$\frac{\pi}{\alpha} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

for a certain $k = 1,2,...$ For instance

$$\alpha \neq \frac{2}{2k+1}$$

where k is a positive integer. Then

$$\lambda_n \neq \left((2\pi)^{\frac{2}{2k+1}} \cdot n^2\right)^{\frac{2k+1}{2}} \cdot e^{i \cdot \frac{2k+1}{2}\pi}$$

$$\lambda_n \neq 2mi\pi,$$

where $m \in \mathbb{N}^*$.

Therefore, assuming that $f(\cdot)$ is asymptotic 1-periodic, then $\Sigma_i(A, \alpha) \cap \sigma_n(f) = \emptyset$. By Theorem 3.6, if $u \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is an asymptotic mild solution of Eq. (3.13), then Eq.3.11 has mild solution w such as $\sigma_n(w) \subset \sigma_n(f), w$ must be asymptotic 1-periodic.

REFERENCES

[1] W. Arendt, C. J.K. Batty. Almost periodic solutions of first- and second-order Cauchy problems. *J. Differential Equations*, 137 (1997), no. 2, 363-383.

[2] J. Massera, The existence of periodic solutions of systems of differential equations, *Duke Math. J.*, 17 (1950), 457-475.

[3] B. Baeumer, M.M. Meerschaert, and E. Nane, Brownian subordinators and fractional Cauchy problems, *Trans. Am. Math. Soc.*, 361 (2009), pp. 3915-3930.

[4] A. Batkai, K.J. Engel, J. Prüss, R. Schnaubelt, Polynomial stability of operator semigroups. *Math. Nachr.* 279 (2006), no. 13-14, 1425-1440.

[5] K-J. Engel, R. Nagel, "*One-parameter semigroups for linear evolution equations*". With contributions by S. Brendle, M. Campiti, T. Hahn, G. Metafune, G. Nickel, D. Pallara, C. Perazzoli, A. Rhandi, S. Romanelli and R. Schnaubelt. Graduate Texts in Mathematics, 194. Springer-Verlag, New York, 2000.

[6] E. Bazhlekova, "*Fractional Evolution Equations in Banach Spaces*".Thesis, Technische Universiteit Eindhoven, 2001.

[7] Ph. Clement, G. Gripenberg, and S.-O. Londen, Schauder estimates for equations with fractional derivatives. *Trans. Am. Math. Soc.* 352 (2000), pp. 2239?2260.

[8] E. Cuesta, Asymptotic behaviour of the solutions of fractional integro-differential equations and some time discretizations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* (Suppl.) (2007), pp. 277-285.

[9] R. Hilfer, "Applications of Factional Calculus in Physics". World Scientific, River Edge, NJ, 2000 .

[10] V. Keyantuo, C. Lizama, Carlos;M. Warma, Existence, regularity and representation of solutions of time fractional wave equations. *Electron. J. Differential Equations*, 2017, Paper No. 222,42pp

[11] Vu Trong Luong, Nguyen Huu Tri, Nguyen Van Minh, Asymptotic behavior of solutions of periodic linear partial functional differential equations on the half line, *J. Differential Equations*, 296 (2021), 1-14.

[12] Vu Trong Luong, Nguyen Van Minh. A Simple Spectral Theory of Polynomially Bounded Solutions and Applications to Differential Equations. *Semigroup Forum*, 102 (2021). 456-476.

[13] A.A. Kilbas, H.M. Srivastsava, and J.J. Trujillo, "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, Elsevier Science, Amsterdam, 2006

[14] Nguyen Van Minh, A Spectral Theory of Non-Uniformly Continuous Functions and the Loomis-Arendt-Batty-Vu Theory on the Asymptotic Behavior of Solutions of Evolution Equations. *J. Differential Equations*, 247 (2009), p.1249-1274.

[15] Nguyen, Van Minh; G. N'Guerekata, S. Siegmund, Circular spectrum and bounded solutions of periodic evolution equations. *J. Differential Equations* 246 (2009), no. 8, 3089-3108

[16] J. Prüss, "Evolutionary integral equations and applications". Monographs in Mathematics, 87. Birkhauser Verlag, Basel, 1993.

[17] Vu Trong Luong, Do Van Loi, Nguyen Van Minh, Hideaki Matsunaga. A Massera theorem for asymptotic periodic solutions of periodic evolution equations. *J. Differential Equations*, 329 (2022). 371-394

[18] Y. Zhou, F. Jiao, (2010), Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations, *Comp. Math. Appl.*, 59(2010), 1063-4475.

ON ASYMPTOTIC PERIODIC SOLUTIONS OF DELAY EVOLUTION EQUATIONS ON THE HALF LINE

ThS. Nguyễn Ngọc Viên [1], PGS.TS Vũ Trọng Lưỡng [2], PGS.TS Lê Văn Hiện [3]

[1] Khoa Toán và KHTN, Trường Đại học Hải Dương
Email: uhdviennguyen.edu@gmail.com
[2] Trường Đại học Giáo dục, Đại học Quốc gia Hà Nội
[3] Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Abstract

We establish necessary and sufficient conditions for the existence of asymptotic periodic solutions of delay evolution equations on half line. These conditions are determined by the spectrum of forcing term and spectrum of evolution semigroups associated with the equations. Our goal is to exten on Massera's theorem by recalling a new concept of solutions, namely, asymptotic solutions for evolution equations in Banach spaces, which have potential applications to partial differential equations as well as abstract functional differential equations.

Key word

Functional differential equations, mild solutions, asymptotic periodicity solutions, Massera's theorem.

1. Introduction

In this paper, we consider the asymptotic behavior of solutions to equations of the form

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + F(t)x_t + f(t),\ x \in \mathbb{X}, t \geq 0 \quad (1.1)$$

Where A is possibly an unbounded linear operator, which generates a strongly continuous semigroup, $x_t \in C_r = C([-r,0],\mathbb{X})$ is defined by $x_t(\theta) = x(t+\theta), r > 0$ is a given positive scalar, $F(t)\varphi = \int_{-r}^{0} d\eta(t,s)\varphi(s)$ for $\varphi \in C_r, \eta(t,\cdot): [-r,0] \to L(\mathbb{X})$ is periodic and continuous in t, of bounded variation, and f is a $\mathbb{X}$-valued asymptotic 1-periodic function on the half line.

Asymptotic behavior of solutions of differential equations is an essential topic in the qualitative theory of differential equations and dynamical systems. In particular, the periodicity of solutions of abstract differential equations has been the subject of research for many mathematicians. We refer the reader to well-known results exploited by Massera [2] or Katnelson-Tsafriri [3]. Recently, some interesting extensions of [2,3] to general classes of evolution equations in Banach space $\mathbb{X}$ are obtained in [9,21,23]. In this paper, we attempt to extend the Massera's theorem by recalling a new concept of solutions, namely, asymptotic solutions that were recently discussed in [23] for evolution equations in Banach spaces with potential applications to partial differential equations as well as abstract functional differential equations. Roughly speaking, a function $u(\cdot)$ is an asymptotic solution to Eq. (1.1) with initial condition $u_0 = \phi \in C_r$ if there is a continuous function $\epsilon(\cdot)$ such that $\lim_{t\to\infty}\epsilon(t) = 0$ and $\dot{x}(t) = Ax(t) + F(t)x_t + f(t) + \epsilon(t)$ for all $t \geq 0$. We say that a bounded and continuous function $f(\cdot)$ on $\mathbb{R}^+$is asymptotic ω-periodic if $\lim_{t\to\infty}(f(t+\omega)-f(t))=0$. This property has a close relation with a property related to classic results discussed by Katznelson-Tzafriri (see, e.g., [3]). More specifically, for a contraction mapping $T:\mathbb{X}\to\mathbb{X}$ with $\sigma(T)\cap\Gamma\subset\{1\}$, one has $\lim_{n\to\infty}(T^{n+1}-T^n)=0$. This means that the sequence $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{T^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ is "asymptotic 1-periodic", that is, $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$. After recalling the concept of circular spectrum of a function, which was first introduced in [19, 21] for functions on the whole real line and further studied in [21] on the half line, we will characterize this asymptotic 1-periodicity in terms of the spectrum of functions on the half line.

The main results obtained in this paper are Theorems 3.18, 3.19 and Theorem 3.20, where sufficient conditions for the asymptotic periodicity of solutions are given in terms of spectral properties of the input f and the monodromy operator associated with the periodic homogeneous equations $\dot{x}(t)=Ax(t)+F(t)x_t$, where we will show that a bounded and continuous function $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{X}$, where $\mathbb{X}$ is a Banach space, is asymptotic 1-periodic if and only if its spectrum $\sigma(g)$ satisfies $\sigma(g)\subset\{1\}$. Therefore, the existence of asymptotic 1-periodic solutions is reduced to that of solutions $x(\cdot)$ such that $\sigma(x(\cdot))\subset\{1\}$. Lemma 3.10 is a key for us to connect the concept of asymptotic mild solutions with the evolution semigroups. By the spectral decomposition, that was first used in [16], we can extend it to the induced evolution semigroups to separate an asymptotic mild solution of a bounded uniformly continuous asymptotic mild solution with precompact range that is again an asymptotic mild solution with spectrum as part of $\{1\}$ (Theorem 3.18). Equation (1.1) has no asymptotic 1-periodic mild solution with precompact range if f is of precompact range and $\sigma(f)$ contains any point $\lambda_0\neq 1$ (Theorem 3.19). Theorem 3.20 shows that Eq. (1.1) has a mild solution $u\in BUC_C(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ and the set $\sigma_\Gamma(P)\setminus\sigma(f)$ is closed then there exists a mild solution w of Eq. (1.1) in $BUC_C(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ such that $\sigma(w)\subset\sigma(f)$. Moreover, such a solution is unique up to a function in $C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$. In the last section, we give two examples to illustrate the obtained results.

2. Preliminaries

2.1. Notation. In this paper, $\mathbb{R},\mathbb{R}^+$and $\mathbb{C}$ stand for the real line, its positive half line and the complex plane. If $\mathbb{X}$ denotes a (complex) Banach space, then $L(\mathbb{X})$ stands for the space of all bounded linear operators in $\mathbb{X}$. The spectrum of a linear operator T in a Banach space is denoted by $\sigma(T)$ and $\rho(T)=\mathbb{C}\setminus\sigma(T)$. We denote by $BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ the space of bounded continuous functions from $\mathbb{R}^+$ to a Banach space $\mathbb{X}$ with supremum norm, $BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ is its subspace consisting of all uniformly continuous functions. We also use the notations $BUC_C(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ and $C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ to denote the sets $\{g\in\ BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$: range of g is precompact $\}$ and $\{g\in BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})\ :\ \lim_{t\to\infty}g(t)=0\}$, respectively. Clearly, $BUC_C(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ is a closed subspace of $BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$, so it is a Banach space as well. We denote $C_r=C([-r,0],\mathbb{X})$. If $x(\cdot)$ is a function defining on the interval (a,b), then $x_t(\theta)=x(t+\theta)$, if $t+\theta\in(a,b)$. In this paper, Γ will stand for the unit circle $\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$.

2.2. Circular spectra of functions on the half line. We first recall here the translation operator S in $BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ defined as

$[Sx](\xi) := x(1+\xi),\ \xi \geq 0, x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$

Throughout this paper, we consider the quotient spaces $\mathbb{Y}$ and $\mathbb{Y}^C$ corresponding by $BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})/C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ and $BUC_C(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})/C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$. Then, S induces operators in $\mathbb{Y}$ and $\mathbb{Y}^C$ that will be denoted by $\bar{S}$. It is well known that $\bar{S}$ is an isometry, so $\sigma(\bar{S}) \subset \Gamma$.

For each $x(\cdot) \in BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$, let us consider the complex function $\mathcal{S}x(\lambda)$ in $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ defined as

$\mathcal{S}x(\lambda) := R(\lambda, \bar{S})\bar{x},\ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$

Lemma 2.1. [21, Lemma 2.3]. We have the following estimate

$$\| \mathcal{S}x(\lambda) \| \leq \frac{\| \bar{x} \|}{|1-|\lambda||}, |\lambda| \neq 1 \ (2.1)$$

Definition 2.2. The circular spectrum of a function $x(\cdot) \in BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ is defined to as the set of all $\xi_0 \in \Gamma$ such that $\mathcal{S}x(\lambda)$ has no analytic extension into any neighborhood of ξ_0 in the complex plane. The circular spectrum of $x(\cdot)$ will be denoted by $\sigma(x)$. We also denote by $\rho(x)$ the set $\Gamma \setminus \sigma(x)$.

The following lemma justifies the introduction of these concepts of spectra.

Lemma 2.3. [21, Lemma 2.3]. For any $x(\cdot) \in BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$, we have

$\sigma(Qx) \subset \sigma(x)$

provided that Q is an operator in $BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ that commutes with S and leaves $C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ invariant.

Similar to [15], the following version of a Gelfand's theorem can be obtained.

Lemma 2.4. Let $\bar{x}$ be an arbitrary point in $\mathbb{Y}$ and assume that the complex function $\mathcal{S}x(\lambda)$ admits $\lambda = \xi_0 \in \Gamma$ as an isolated singular point. Then, ξ_0 is either a removable singular point or a pole of first order.

As a consequence of Lemma 2.4, we have the following result.

Lemma 2.5. Let $\xi_0 \in \Gamma$ be an isolated singular point of $\mathcal{S}x(\lambda) = R(\lambda, \bar{S})\bar{x}$ with a given $\bar{x} \in \mathbb{Y}$. Then, this singular point ξ_0 is removable provided that

$$\lim_{\lambda \downarrow \xi_0} (\lambda - \xi_0) R(\lambda, \bar{S})\bar{x} = 0 \ \ (2.2)$$

3. Main results

3.1. Asymptotic periodic functions and their spectral characterization

We begin with the concept of asymptotic 1-periodic functions on the half line. It is noted that our definition of asymptotic periodicity is slightly different from the concept used in many previous works.

Definition 3.1. A function $f \in BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ is said to be asymptotic 1-periodic if

$$\lim_{t\to\infty} \big(f(t+1) - f(t)\big) = 0 \ (3.1)$$

Remark 3.2. The concept of asymptotic 1-periodic presented in Definition 3.1 may not be equivalent to the following definition of asymptotic 1-periodicity which has been widely used in the literature f is asymptotic 1-periodic if and only if

$$f(t) = a(t) + b(t) \quad (3.2)$$

where a, b are continuous functions such that a is 1-periodic and $\lim_{t\to\infty} b(t) = 0$.

There are many examples and some sufficient conditions for the asymptotic periodicity in the sense of our Definition 3.1 that can be found, for example, in [18, Example 3.3] shows that $f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ defined as $f(t) = \sin\sqrt{t}, t \in \mathbb{R}^+$ is an asymptotic 1-periodic function but it cannot be expressed as (3.2).

If $\bar{x} \in \mathbb{Y}$, then we define its spectrum in the same way as in Definition 2.2. For an element $\bar{x} \in \mathbb{Y}$, we denote as $\mathcal{M}_{\bar{x}}$ the closed space spanned by $\{\bar{S}^n \bar{x}, n \in \mathbb{Z}\}$. Note that $\mathcal{M}_{\bar{x}}$ is invariant under $\bar{S}$.

Proposition 3.3. The following assertions hold.

i) Let $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Then, $\sigma(x) = \emptyset$ if and only if $x \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$

ii) Let $p \in \mathbb{R}$ and $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Then $\sigma(x) \subset \{e^{ip}\}$ if and only if

$$\lim_{t\to\infty} \left(x(t+1) - e^{ip}x(t)\right) = 0 \quad (3.3)$$

iii) Let Λ be a closed subset of Γ and $\mathbb{Y}_\Lambda = \{\bar{x} \in \mathbb{Y}^C : \sigma(\bar{x}) \subset \Lambda\}$. Then, $\mathbb{Y}_\Lambda$ is a closed subspace of $\mathbb{Y}^C$.

iv) If $\sigma(\bar{x}) \neq \emptyset$, then $\sigma(\bar{x}) = \sigma\left(\bar{S}|_{\mathcal{M}_{\bar{x}}}\right)$.

v) Let $\Lambda = \Lambda_1 \sqcup \Lambda_2$, where Λ_1, Λ_2 are disjoint closed subsets of Γ. Then,

$$\mathbb{Y}_\Lambda = \mathbb{Y}_{\Lambda_1} \oplus \mathbb{Y}_{\Lambda_2}$$

Moreover, the projection associated with this direct sum commutes with any operator that commutes with the shift operator $\bar{S}$.

vi) Let $f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Assume that f' exists and also belongs to $BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Then,

$$\sigma(f') \subset \sigma(f)$$

Proof. The proof is similar to that of [23, Proposition 3.4]. We omit it here.

3.2. Existence of asymptotic solutions

Definition 3.4. A function $u(\cdot) \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is said to be a mild solution of Eq. (1.1) with initial condition $u_0 = \phi \in C_r$ if it satisfies the integral equation

$$u(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-\xi)\left[F(\xi)u_\xi + f(\xi)\right]d\xi, t \in \mathbb{R}^+$$

If A generates a C_0-semigroup and $F(t): C_r \to \mathbb{X}$ for each t and depends continuously and periodically on t with period 1 , then the homogeneous equation

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + F(t)u_t$$

Generates a 1-periodic evolutionary process, denoted by $(U(t,s)_{t\geq s})$ in the phase space C_r. In fact,

$$U(t,s): C_r \ni \phi \mapsto u_t \in C_r$$
$$U(t,s)\phi(\theta) = u_t(\theta) = u(t+\theta), \forall\theta \in [-r,0]$$

where u is the mild solution of Eq. (1.1) with $f \equiv 0$ and $u_s = \phi$.

We now recall the concept of periodic evolutionary processes and their properties.

Definition 3.5. Let $(U(t,s))_{t\geq s}$ be a two-parameter family of bounded operators in a Banach space $\mathbb{X}$. Then, it is called an evolutionary process if i) $U(t,t) = I$ for all $t \in \mathbb{R}$;

ii) $U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$ for $t \geq s \geq r$;

iii) The map $(t,s) \mapsto U(t,s)x$ is continuous for every fixed $x \in \mathbb{X}$;

iv) and $\| U(t,s) \| < Ne^{\omega(t-s)}$ for some positive N, ω independent of $t \geq s$.

An evolutionary process is called 1-periodic if

$U(t+1, s+1) = U(t,s)$, for all $t \geq s$

Recall that for a given 1-periodic evolutionary process $(U(t,s))_{t\geq s}$, the operator

$P(t) = U(t, t-1), t \in \mathbb{R}$

is called a monodromy operator. Thus, we have a family of monodromy operators. We will denote $P = P(0)$. The nonzero eigenvalues of $P(t)$ are called characteristic multipliers. An important property of monodromy operator is stated in the following lemma whose proof can be found or modified from similar results in [11, 13].

Lemma 3.6. The following assertions hold.

i) $P(t+1) = P(t)$ for all t and characteristic multipliers are independent of time, i.e. the nonzero eigenvalues of $P(t)$ coincide with those of P.

ii) $\sigma(P(t)) \setminus \{0\} = \sigma(P) \setminus \{0\}$, i.e., it is independent of t.

iii) If $\lambda \in \rho(P)$, then the resolvent $R(\lambda, P(t))$ is strongly continuous.

iv) If $\mathcal{P}$ denotes the operator of multiplication by $P(t)$ in space $BUC(\mathbb{R}^+, C_r)$, then

$$\sigma(\mathcal{P}) \setminus \{0\} \subset \sigma(P) \setminus \{0\} \quad (3.4)$$

Definition 3.7. A function $u(\cdot) \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is said to be an asymptotic mild solution of Eq. (1.1) with initial condition $u_0 = \phi \in C_r$ if there exists a function $\epsilon(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ such that of

$$u(t) = T(t)\phi(0) + \int_0^t T(t-\xi)\big[F(\xi)u_\xi + f(\xi) + \epsilon(\xi)\big]d\xi, t \in \mathbb{R}^+ \qquad (3.5)$$

We introduce a function Γ^n defined by

$$\Gamma^n(\theta) = \begin{cases} (n\theta + 1)I & -1/n \leq \theta \leq 0 \\ 0 & \theta < -1/n \end{cases}$$

where n is a positive integer and I is the identity operator on $\mathbb{X}$. An explanation of the function $\Gamma^n f(s)$ as an element of C_r is in order. By our definition,

$$\Gamma^n f(s): [-r,0] \ni \theta \mapsto \Gamma^n(\theta) f(s) = \begin{cases} (n\theta + 1) f(s), & -1/n \leq \theta \leq 0 \\ 0, & \theta < -1/n \end{cases}$$

Since the evolutionary process $(U(t,s))_{t\geq s}$ is strongly continuous, the C_r-valued function $U(t,s)\Gamma^n f(s)$ is continuous in $s \in [-r,t]$ whenever $f \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$.

The following theorem, whose proof can be found in [17], is a variation of the constant formula for solutions of (1.1) in the phase space C_r.

Theorem 3.8. The segment $u_t(s,\phi;f)$ of solution $u(\cdot,s,\phi,f)$ of (1.1) satisfies the following relation in C_r

$$u_t(s,\phi;f) = U(t,s)\phi + \lim_{n\to\infty}\int_s^t U(t,\xi)\Gamma^n f(\xi)d\xi,\ t \geq s \geq 0 \qquad (3.6)$$

Moreover, the above limit exists uniformly for bounded $|t-s|$.

We denote the function $t \mapsto u_t$ by the symbol $u.$, the following Lemmas will be proved.

Lemma 3.9. The following assertion holds

$\sigma(u) \subset \sigma(u.)$

Proof. Putting $v():.= u.$ in C_r. If $\lambda \in \rho(v)$ then $R(\lambda,\bar{S})\bar{v}$ has an analytic extension in a neighborhood of λ, where

$R(\lambda,S)u_t: s \ni [-r;0] \mapsto u_t(s) \in C_r.$

This shows that $R(\lambda,S)v(t)(s) = R(\lambda,S)u_t(s)$ has an analytic extension in a neighborhood of λ, for all $s \in [-r,0], t \in \mathbb{R}^+$ and so does $R(\lambda,S)u(t+s)$ for all $t+s \in [-r,+\infty)$. Therefore, $R(\lambda,S)u(t)$ has an analytic extension in a neighborhood of λ for all $t \geq 0$. This means $\lambda \in \rho(u)$.

Denote $\sigma_\Gamma(P)$ by $\sigma(P)\cap\Gamma$ and using the variation of constant formula (3.6) we will prove the following estimate of spectrum that will be the key tool for our study in this paper.

Lemma 3.10. For each function $u. \in BUC(\mathbb{R}^+,C_r)$, which is a mild solution of Eq. (1.1) on $\mathbb{R}^+$, and $f \in BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$, the following inclusion holds

$$\sigma(u.) \subset \sigma_\Gamma(P) \cup \sigma(f) \ (3.7)$$

Proof. By the formula (3.6), for $t \geq 0$, we have

$$u_{t+1} = U(t+1,t)u_t + \lim_{n\to\infty}\int_t^{t+1} U(t+1,s)\Gamma^n f(s)ds \quad (3.8)$$

and the limit exists uniformly in t that belongs to a bounded interval. Define an operator F_n as below

$$[F_n f](t) = \int_t^{t+1} U(t+1,s)\Gamma^n f(s)ds, f \in BUC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X}), t \geq 1$$

Note that F_n commutes with S, so $\sigma(F_n f) \subset \sigma(f)$. Next, if we set

$$[Ff](t) = \lim_{n\to\infty}\int_t^{t+1} U(t+1,s)\Gamma^n f(s)ds$$

then, due to the uniformity of the limit, $\sigma(Gf) \subset \sigma(f)$ as well.

At this point we can easily see that for each $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $|\lambda| \neq 1$

$$[(\lambda - S)u.](t) = \lambda u_t - U(t+1,t)u_t + \lim_{n\to\infty} F_n f$$
$$= \lambda u_t - P(t)u_t + Ff$$

Let us consider the operator of multiplication by $P(t)$, denoted by $\mathcal{P}$. The periodicity of the evolution process $(U(t,s))_{t\geq s}$ yields that $P(t)$ is 1-periodic, so it commutes with the translation S. Obviously,

$$(\lambda - \bar{S})\bar{u}. = (\lambda - \mathcal{P})\bar{u}. + \bar{F}f$$

This means that

$$R(\lambda, \bar{S})\bar{u}. = R(\lambda, \mathcal{P})\bar{u}. - R(\lambda, \mathcal{P})R(\lambda, \bar{S})(\bar{F}f)$$

whenever λ is within a small neighborhood of $\xi_0 \notin (\sigma(P) \cup \sigma(f))$. This shows that $R(\lambda, \mathcal{P})\bar{u}.$ has an analytic extension in a neighborhood of ξ_0 and so does $R(\lambda, \bar{S})\bar{u}$. This proves (3.7).

From the Lemma 3.10, we can get the following result which is analogous to Katznelson-Tsafriri's theorem.

Theorem 3.11. Let $\sigma_\Gamma(P) \subset \{1\}$ and $u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is a mild solution of Eq. (1.1) on the half line $\mathbb{R}^+$. Assume that $f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is asymptotic 1-periodic. Then,

$$\lim_{t\to\infty} (u(t+1) - u(t)) = 0$$

Proof. Since $f \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is asymptotic 1-periodic, by Lemma 3.10, we have that $\sigma(f) \subset \{1\}$, and hence $\sigma(u.) \subset \{1\}$. By Lemma 3.9, the spectrum of u is contained in $\{1\}$. The proof is then completed by utilizing Proposition 3.3.

3.3. Uniqueness of asymptotic solutions

Let us consider the following linear evolution equation

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \quad (3.9)$$

where $x \in \mathbb{X}$ and A is the infinitesimal generator of a strongly continuous semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$ on $\mathbb{X}$.

Definition 3.12. The following formal semigroup associated with the given strongly continuous semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$

$$(T^h u)(t) = T(h)u(t-h),\ t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.10)$$

where u is an element of some function space, is called an evolution semigroup associated with the semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$.

We are now discuss the relation between this evolution semigroup and the following inhomogeneous equation

$$x(t) = T(t-s)x(s) + \int_s^t T(t-\xi)f(\xi)d\xi,\ t \geq s \quad (3.11)$$

associated with the semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$. A continuous solution $u(t)$ of Eq. (3.11) will be called a mild solution to Eq. (3.9). We denote $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) \to BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, where $D(\mathcal{L})$ consists of all mild solutions of

Eq.(3.11), $u(\cdot) \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ with some $f \in BUC_c(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, and in this case $\mathcal{L}u(\cdot) = f$. This operator $\mathcal{L}$ is well defined as a single-valued operator and is obviously an extension of the differential operator $d/dt - A$.

We will denote by $\mathcal{F}$ the operator acting on $BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ defined by the formula

$\mathcal{F}u(\xi) := F(\xi)u_\xi,\ u \in BUC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$

For bounded uniformly continuous mild solutions $x(\cdot)$, the following characterization is very useful.

Theorem 3.13. $x(\cdot)$ is a bounded uniformly continuous mild solution of Eq. (1.1) if and only if $\mathcal{L}x(\cdot) = \mathcal{F}x(\cdot) + f$.

We have the following

Lemma 3.14. [9, Lemma 2.3] If the evolution semigroup $(T^h)_{h\geq 0}$ is a C_0-semigroup in $BUC_c(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, then, for the infinitesimal generator $\mathcal{G}$ of $(T^h)_{h\geqslant 0}$ in the space $BUC_c(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, one has $\mathcal{G}g = -\mathcal{L}g$ if $g \in D(\mathcal{G})$.

Lemma 3.15. The evolution semigroup $(T^h)_{h\geq 0}$ is a C_0-semigroup in $BUC_c(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Moreover, $\bar{\mathcal{G}}$ is the generator of its induced semigroup $(\bar{T}^h)_{h\geq 0}$ in $\mathbb{Y}^C$.

Proof. See, for example, [23, Lemma 3.8].

Lemma 3.16. [23, Lemma 3.9] Assume that $M(t), t \in \mathbb{R}^+$, is a family of bounded linear operators in $\mathbb{X}$ that satisfies

i) The function $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{X} \ni (t, x) \mapsto M(t)x \in \mathbb{X}$ is continuous;

ii) $M(t+1) = M(t)$ for all $t \in \mathbb{R}^+$;

iii) $\sup_{0\leq t\leq 1} \| M(t) \| < +\infty$.

Then, for each $x(\cdot) \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, we have

$\sigma(\mathcal{M}x(\cdot)) \subset \sigma(x(\cdot))$

where $\mathcal{M}$ denotes the operator in $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ defined as

$[\mathcal{M}x(\cdot)](t) := M(t)x(t), t \in \mathbb{R}^+$

In particular, for each $h \geq 0$ and $x(\cdot) \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, the following assertion holds

$$\sigma(T^h x(\cdot)) \subset \sigma\big(x(\cdot)\big) \quad (3.12)$$

Lemma 3.17. Let $f \in BUC_c(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. If Ep.(1.1) has mild solution with precompact range $u(\cdot) \in BUC_c(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ then

$$\sigma(f) \subset \sigma\big(u(.)\big) \ (3.13)$$

Proof. We have $F(.)$ is 1-periodic. Hence,

$$\begin{aligned} S\mathcal{F}u(\xi) &= \mathcal{F}u(\xi+1) \\ &= F(\xi+1)u_{\xi+1} = F(\xi)u_{\xi+1} \\ &= F(\xi)Su_\xi = (\mathcal{F}Su)(\xi). \end{aligned}$$

Then, $\mathcal{F}$ induces operators in $\mathbb{Y}$ and $\mathbb{Y}^C$ that will be denoted by $\bar{F}$. Therefore, $\bar{F}$ commutes with $\bar{S}$ so that $\sigma(\bar{F}\bar{u}) \subset \sigma(\bar{u})$.

Since, for each $h > 0, \sigma\left(\frac{T^h u - u}{h}\right) \subset \sigma(u)$, by (iii) of Proposition 3.3, Theorem 3.13 yields that

$$\begin{aligned}\sigma(\bar{f}) = \sigma(-\bar{f}) = \sigma\left(\lim_{h\downarrow 0} \frac{\bar{T}^h\bar{u} - \bar{u}}{h} + \bar{F}\bar{u}\right) \\ \subset \sigma(\bar{u})\end{aligned}$$

Consequently, the relation (3.13) holds according to $\sigma(-\bar{f}) = \sigma(\bar{f}) = \sigma(f)$.

Theorem 3.18. If the function $f(\cdot) \in BUC_C(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ in Eq.(1.1) is asymptotic 1-periodic, then Eq.(1.1) has an asymptotic 1-periodic mild solution whenever it has an asymptotic mild solution in $BUC_C(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ provided that 1 is either not in or just an isolated point of $\sigma_\Gamma(P)$. Moreover, if $\sigma_\Gamma(P) \subset \{1\}$ then every asymptotic mild solution in $BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ of Eq.(1.1) is asymptotic 1-periodic.

Proof. Let x be an asymptotic mild solution of Eq.(1.1). By Lemma 3.10, $\sigma(x) \subset \sigma_\Gamma(P) \cup \sigma(f+\epsilon)$, where $\epsilon(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$. By $\sigma(f+\epsilon) \subset \sigma(f) \cup \sigma(\epsilon)$ and $\sigma(\epsilon) = \emptyset$, therefore, $\sigma(x) \subset \sigma_\Gamma(P) \cup \sigma(f)$. Since f is asymptotic 1-periodic, $\sigma(f) \subset \{1\}$. If we define $\Lambda = \sigma_\Gamma(P), \Lambda_1 := \{1\}$ and $\Lambda_2 = \sigma_\Gamma(P) \setminus \{1\}$, then Λ_1 and Λ_2 are closed and disjoint.

Next, consider the induced evolution semigroup $(\bar{T}^h)_{h\geq 0}$ in $\mathbb{Y}$. With the notations of the statement of Proposition 3.3, $\bar{x} \in \mathbb{Y}_\Lambda = \mathbb{Y}_{\Lambda_1} \oplus \mathbb{Y}_{\Lambda_2}$. Let us denote by Q the projection of $\mathbb{Y}_\Lambda$ onto $\mathbb{Y}_{\Lambda_1}$ along $\mathbb{Y}_{\Lambda_2}$. Then, Q is commutative with the evolution semigroup $(\bar{T}^h)_{h>0}$ since the translation S is commutative with $(T^h)_{h\geq 0}$. Next, since $x(\cdot) \in BUC_C(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ is an asymptotic mild solution of Eq.(1.1), there exists a function $\epsilon(\cdot)$ such that the integral equation (3.5) is satisfied. In addition, since $f(\cdot) + \epsilon(\cdot)$ is in $BUC_C(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$, by the strong continuity of the evolution semigroup in $BUC_C(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ and Lemma 3.15, we have

$$f + \epsilon = -\mathcal{G}x - \mathcal{F}x = -\lim_{h\downarrow 0} \frac{T^h x - x}{h} - \mathcal{F}x$$

Therefore,

$$\bar{f} = -\bar{\mathcal{G}}\bar{x} - \bar{\mathcal{F}}\bar{x} = -\lim_{h\downarrow 0} \frac{\bar{T}^h \bar{x} - \bar{x}}{h} - \bar{\mathcal{F}}\bar{x}$$

Note also that $Q\bar{f} = \bar{f}$, so

$$\begin{aligned}\bar{f} = Q\bar{f} &= -\lim_{h\downarrow 0} \frac{Q\bar{T}^h \bar{x} - Q\bar{x}}{h} - Q\bar{\mathcal{F}}\bar{x} \\ &= -\lim_{h\downarrow 0} \frac{\bar{T}^h Q\bar{x} - Q\bar{x}}{h} - \bar{\mathcal{F}}Q\bar{x} \\ &= -\bar{\mathcal{G}}Q\bar{x} - \bar{\mathcal{F}}Q\bar{x}\end{aligned}$$

With the description of $\bar{\mathcal{G}}$ (see, e.g., [6, p. 61]), this means there exists a representative $u \in D(\mathcal{G})$ in the class $Q\bar{x}$ such that $\mathcal{G}u + \mathcal{F}u = -g \in \bar{f}$. Thus, u is an asymptotic mild solution of Eq.(1.1).

If $\sigma_\Gamma(P) \subset \{1\}$, every asymptotic mild solution $x(\cdot)$ has spectrum $\sigma(x(\cdot)) \subset \{1\}$ according to Lemma 3.10. Therefore, by Proposition 3.3, every asymptotic mild solution is asymptotic 1-periodic.

Theorem 3.19. Let $f(\cdot) \in BUC_C(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Then, Eq. (1.1) has no asymptotic 1-periodic mild solution with precompact range if f has precompact range and $\sigma(f)$ contains any point $\lambda_0 \neq 1$.

Proof. If u is an arbitrary mild solution of Eq.(1.1) with precompact range and $\lambda_0 \in \sigma(f)$ for some $\lambda_0 \neq 1$, then, according to Lemma 3.17, we have that $\lambda_0 \in \sigma(u(\cdot))$. From this and Proposition 3.3 (ii), we conclude that u is not asymptotic 1-periodic. The theorem is proved.

Theorem 3.20. Assume that Eq.(1.1) has an asymptotic mild solution $u \in BUC_C(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ and $\sigma_\Gamma(P) \setminus \sigma(f)$ is closed. Then, the following assertions are valid:

i) There exists an asymptotic mild solution w of Eq.(1.1) in $BUC_C(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ such that

$$\sigma(w) \subset \sigma(f) \tag{3.14}$$

ii) In particular, if

$$\sigma_\Gamma(P) \cap \sigma(f) = \emptyset$$

then, the asymptotic mild solution $w(\cdot)$ mentioned in the part (i) is unique in the sense that if w_1 is another asymptotic mild solution in $BUC_C(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ with $\sigma(w_1) \subset \sigma(f)$, then $w - w_1 \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$

Proof. (i) Let u be an asymptotic mild solution of Eq.(1.1). By Lemma 3.10, $\sigma(u) \subset \sigma_\Gamma(P) \cup \sigma(f + \epsilon) = \sigma_\Gamma(P) \cup \sigma(f)$. We define $\Lambda = \sigma_\Gamma(P) \cup \sigma(f), \Lambda_1 = \sigma(f)$ and $\Lambda_2 = \sigma_\Gamma(P) \setminus \sigma(f)$, then Λ_1 and Λ_2 are closed and disjoint. According to Proposition 3.3, the spectral sets Λ, Λ_1, and Λ_2 induce semigroups that leave the corresponding spaces $\mathbb{Y}_\Lambda, \mathbb{Y}_{\Lambda_1}$ and $\mathbb{Y}_{\Lambda_2}$ invariant. With the notations defined as in Proposition 3.3, we have $\bar{u} \in \mathbb{Y}_\Lambda = \mathbb{Y}_{\Lambda_1} \oplus \mathbb{Y}_{\Lambda_2}$. Let Π be the projection of $\mathbb{Y}_\Lambda$ onto $\mathbb{Y}_{\Lambda_1}$ along $\mathbb{Y}_{\Lambda_2}$. Then, Π is commutative with the evolution semigroup $(\bar{T}^h)_{h \geq 0}$ and $\bar{\mathcal{F}}$. In addition, using the fact that $u(\cdot) \in BUC_C(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is an asymptotic mild solution of Eq.(1.1) if and only if $u \in D(\mathcal{L})$ and

$$\mathcal{L}u = \mathcal{F}u + f + \epsilon$$

by Lemma 3.15, we have

$$\mathcal{L}u = -\mathcal{G}u$$

This leads to

$$-\mathcal{G}u = \mathcal{F}u + f + \epsilon$$

Therefore

$$-\bar{\mathcal{G}}\bar{u} = \bar{\mathcal{F}}\bar{u} + \bar{f}$$

We have

$$-\Pi\bar{\mathcal{G}}\bar{u} = -\Pi \lim_{h\to 0^+} \frac{\bar{T}^h\bar{u} - \bar{u}}{h}$$
$$= -\lim_{h\to 0^+} \frac{\bar{T}^h\Pi\bar{u} - \Pi\bar{u}}{h}$$
$$= -\bar{\mathcal{G}}\Pi\bar{u}$$

Since $\Pi\bar{f} = \bar{f}$, and Π commutes with $\bar{\mathcal{F}}$, the following identities hold

$$-\bar{\mathcal{G}}\Pi\bar{u} = \bar{\mathcal{F}}\Pi\bar{u} + \bar{f}$$

This means that there exists an $w \in D(\mathcal{G})$ which belongs to the class $\Pi\bar{u}$ such that

$$\mathcal{G}w + \mathcal{F}w = -g \in \bar{f}$$

Thus, w is an asymptotic mild solution of Eq.(1.1) and $w = \Pi\bar{u} \in \mathbb{Y}_{\Lambda_1}$ that has circular spectrum $\sigma(w) = \sigma(\Pi\bar{u}) \subset \Lambda_1 = \sigma(f)$.

(ii) In particular, if

$$\sigma_\Gamma(P) \cap \sigma(f) = \emptyset$$

then, assuming $w_1 \in BUC_C(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ is another mild solution of Eq.(1.1) with $\sigma(w_1) \subset \sigma(f)$, we see that $u(\cdot) := w(\cdot) - w_1(\cdot)$ is an asymptotic mild solution of Eq.(1.1) with $f = 0$, so by Lemma 3.10 (for $f = 0$) $\sigma(u(\cdot)) \subset \sigma_\Gamma(P) \cap \sigma(0) = \sigma_\Gamma(P)$. Therefore, $\sigma(u(\cdot)) \subset \sigma_\Gamma(P) \cap \sigma(f) = \emptyset$. Consequently, by Proposition 3.3, this yields $u(\cdot) = w(\cdot) - w_1(\cdot) \in C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. The proof is completed.

Remark 3.21. Theorem 3.20 can be regarded as an analogous version of the main result of [8] (see also [1,13,17]) in the case of evolutions equations on the half line $\mathbb{R}^+$.

As a consequence of Theorem 3.20, we have the following result.

Corollary 3.22. Assume that $1 \notin \sigma_\Gamma(P), f$ is an asymptotic 1-periodic function and Eq.(1.1) has an asymptotic periodic mild solution. Then, Eq.(1.1) possesses an asymptotic 1-periodic mild solution $u(\cdot)$ that is unique up to a function in $C_0(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$.

4. Examples

Example 4.1. Consider the following equation

$$w_t(x,t) = w_{xx}(x,t) - aw(x,t-r) + f(x,t), \; x \in (0,\pi), t \geq 0$$

where $w(x,t), f(x,t)$ are scalar-valued functions, and a is a constant. Assume that for each $x \in (0,\pi), f(x,\cdot)$ is 1- periodic and continuous in t. We denote $\mathbb{X} = L^2(0,\pi)$ and define operator $A: \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ by the formula

$$A = y''$$

The domain of A is given as

$$D(A) = \{y \in \mathbb{X}: y, y' \text{ are absolutely continuous, } y'' \in \mathbb{X}, y(0) = y(\pi) = 0\}.$$

In addition, $F: C_r \to \mathbb{X}$ is defined as $F\varphi = -a\varphi(-r), g(t) := f(\cdot,t) \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{R}^+$. Then, Eq.(4.1) can be written in the form

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Fx_t + g(t),\ x(t) \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{R}^+ \quad (4.2)$$

As is shown in [24], the operator A is the infinitesimal generator of a compact semigroup $(T(t))_{t\geq 0}$ in $\mathbb{X}$ and the delay equation (4.2) generates a C_0-semigroup $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ in the phase space $C([-r,0],\mathbb{X})$ that is also compact. Moreover, the operator $\mathcal{S}(1)$ is the operator P mentioned in our Theorems 3.20. Since $(\mathcal{S}(t))_{t\geq 0}$ is compact, by the spectral mapping theorem the spectrum $\sigma_\Gamma(P)$ is determined by

$$\sigma_\Gamma(P) = \sigma_\Gamma(\mathcal{S}(1)) = e^{\Sigma_i}$$

where Σ_i is the set of all eigenvalues of the generator $\mathcal{G}$ of $(\mathcal{S}(t))_{t>0}$ on the imaginary axis. As the eigenvalues of A are $-n^2, n = 1,2, \ldots$, the set of all eigenvalues of the generator $\mathcal{G}$ consists of all imaginary roots of the characteristic equation (see [24])

$$\lambda + ae^{-\lambda r} = -n^2,\ n = 1,2, \ldots \quad (4.3)$$

We will choose a so that Eq.(4.3) has no imaginary root. In fact, Let $\lambda = i\alpha$ be an imaginary root of Eq.(4.3). Then, substituting it into the equation gives

$$i\alpha + ae^{-i\alpha r} = -n^2,\ n = 1,2, \ldots \quad (4.4)$$

This implies,

$$\alpha = a\sin(\alpha r) \quad (4.5)$$
$$-n^2 = a\cos(\alpha r) \quad (4.6)$$

so, if $\alpha \neq 0$ and $|a| < 1/r$, then,

$$|\alpha| = |a\sin(\alpha r)| \leq |ar| \cdot |\alpha| < |\alpha| \quad (4.7)$$

This contradiction shows that if $|a| < 1/r$, there is only possibility for Eq.(4.3) to have an imaginary is $\alpha = 0$. If we use Eq.(4.6) we can see that $\alpha = 0$ leads to $0 = a$. Therefore, if we choose

$$0 < a < \frac{1}{r} \quad (4.8)$$

then, Eq.(4.4) has no root for all $n = 1,2,\cdots$. Therefore, under Condition (4.8), $\sigma_\Gamma(P) = \emptyset$, so $\sigma_\Gamma(P) \cap \sigma(g) = \emptyset$.

By Theorem 3.20, if there exists an asymptotic mild solution to Eq.(4.2), then, Eq.(4.2) has an asymptotic 1-periodic mild solution that is unique.

Example 4.2. Consider the following evolution equation

$$\frac{du(t)}{dt} = -Au(t) + B(t)u_t + f(t), t \geq 0 \quad (4.9)$$

where A is a sectorial operator in $\mathbb{X}, B(t)$ from $C([-r,0],\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ is 1 -periodic and continuous in t. For an example, we may choose such an operator

$$B(t)u_t = \sin(t) \int_{-r}^{0} e^s u_t(s)ds$$

where u_t is defined as usual and f is a $\mathbb{X}$-valued asymptotic 1-periodic function on the half line. Moreover, we assume that the operator A has compact resolvent with domain $D(A)$

dense in $\mathbb{X}$. Then, it well-known that $-A$ generates a strongly continuous analytic and compact semigroup of linear bounded operators in $\mathbb{X}$. Hence, for this class of equations, all assertions of this paper under assumption that $\sigma_\Gamma(P) \setminus \sigma(f)$ is closed, are applicable. This is because that $\sigma_\Gamma(P)$ consists of only finitely many points, and $\sigma(f) \subset \{1\}$. We also note that some important parabolic partial differential equations can be included in the class of evolution equations given in (4.9).

REFERENCES

[1] Batty, C. J. K., Hutter, W. and Räbiger, F., *Almost periodicity of mild solutions of inhomogeneous periodic Cauchy problems*, J. Differ. Equ., 156 (1999), 309327 .

[2] Massera, J., *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*, Duke Math. J., 17 (1950), 457-475.

[3] Katznelson, Y. and Tzafriri, L., *On power bounded operators, J. Funct. Anal.,* 68 (1986), 313-328.

[4] Naito, T. and Minh, N.V., *Evolution semigroups and spectral criteria for almost periodic solutions of periodic evolution equations*, J. Differ. Equ., 152 (1999), $358-376$.

[5] Furumochi, T., Naito, T. and Minh, N.V., *Boundedness and almost periodicity of solutions of partial functional differential equations*, J. Differ. Equ., 180 (2002), 125-152.

[6] Hatvani, L. amd Kristin, T., *On the existence of periodic solutions for linear inhomogeneous and quasilinear functional differential equations*, J. Differ. Equ. $\mathbf{97}(1992),1-15$.

[7] Hino, Y., Naito, T., Minh, N.V. and Shin, J.S., *Almost Periodic Solutions of Differential Equations in Banach Spaces*, Taylor & Francis, London, 2001.

[8] Murakami, S., Naito, T. and Minh, N.V., *Massera's theorem for almost periodic solutions of functional differential equations,* J. Math. Soc. Japan, 47 (2004), $247-268$.

[9] Minh, N.V., N'Guerekata, G. and Siegmund, S., *Circular spectrum and bounded solutions of periodic evolution equations*, J. Differ. Equ. 246, (2009), $3089-3108$.

[10] Luong, V.T., Tri, N.H. and Minh, N.V., *Asymptotic behavior of solutions of periodic linear partial functional differential equations on the half line*, J. Differ. Equ., 296 (2021), 1-14.

[11] Luong, V.T. and Minh, N.V., *Almost periodic solutions of periodic linear partial functional differential equations*, Funk. Ekva., 62 (2019), 209-226.

[12] Travis, C.C. and Webb, G.F. . *Existence and stability for partial functional differential equations*. Transactions of the A.M.S. 200 (1974), 394-418.